ш к о л ь н ы е

о л и м п и а д ы

ШКОЛЬНЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОЛИМПИАДЫ

2-е издание, стереотипное

ДРОФА
Москва 2001

УДК 373.167.1:51
ББК 22.1я721.6
Ш67

*Серия «Школьные олимпиады»
основана в 1997 году*

Школьные математические олимпиады / Сост.
Ш67 Н. Х. Агаханов, Д. А. Терешин, Г. М. Кузнецова. — 2-е изд., стереотип. — М.: Дрофа, 2001. — 128 с.: ил. — (Школьные олимпиады).

ISBN 5—7107—4497—2

В книге собраны задачи, предлагавшиеся учащимся 8—11 классов на региональной, зональной и заключительной частях Всероссийских олимпиад. Ко всем задачам даются решения.

Сборник адресован учащимся старших классов. Он будет полезен при подготовке к олимпиадам и к вступительным экзаменам в вузы математического профиля.

УДК 373.167.1:51
ББК 22.1я721.6

Учебное издание

Серия «Школьные олимпиады»

Школьные математические олимпиады

Составители:

Агаханов Назар Хангельдыевич
Терешин Дмитрий Александрович
Кузнецова Галина Михайловна

Зав. редакцией *М. Г. Циновская*
Редактор *А. М. Суходский*. Оформление *А. В. Кузнецов*
Художественный редактор *М. Г. Мицкевич*
Технический редактор *М. В. Биденко*. Компьютерная верстка *О. И. Колотова*. Корректор *Р. В. Низяева*

Изд. лиц. № 061622 от 07.10.97.
Подписано к печати 23.03.01. Формат 84×108 1/32.
Бумага типографская. Гарнитура «Школьная». Печать высокая.
Усл. печ. л. 6,72. Тираж 5000 экз. Заказ № 107-2.

ООО «Дрофа». 127018, Москва, Сущевский вал, 49.

По вопросам приобретения продукции издательства «Дрофа» обращаться по адресу: 127018, Москва, Сущевский вал, 49.
Тел.: (095) 795-05-50, 795-05-51. Факс: (095) 795-05-52.

Торговый дом «Школьник». 109172, Москва, ул. Малые Каменщики, д. 6, стр. 1А. Тел.: (095) 911-70-24, 912-15-16, 912-45-76.

**Изготовлено с готовых диапозитивов в Тульской типографии.
300600, г. Тула, пр. Ленина, 109.**

ISBN 5—7107—4497—2

Содержание

Предисловие

Первые состязания по математике начали проводиться в конце прошлого века в Румынии (1884) и Австро-Венгрии (1894) и сразу же обнаружили поразительную свою особенность — выявлять людей высшей одаренности.

В России первая математическая олимпиада была проведена в Ленинграде (1934). Ныне математическое олимпиадное движение охватило весь мир. Практически невозможно назвать развитую страну, где бы не проводились регулярно математические олимпиады. Достаточно сказать, что в последних международных олимпиадах по математике приняли участие школьники более чем из 80 стран мира.

Настоящий сборник адресован главным образом учащимся старших классов, проявляющим интерес к изучению математики. Он будет полезен им при подготовке к олимпиадам, а также при подготовке к поступлению в вузы математического профиля. Школьный учитель найдет в нем много интересных задач для работы с учениками на уроке и на внеклассных занятиях.

В книге собраны задачи, предлагавшиеся учащимся 8, 9, 10 и 11 классов на трех последних этапах XXII и XXIII Всероссийских олимпиад по математике: региональном (часть А), зональном (часть Б) и заключительном (часть В) в период с 1995 по 1997 учебный год. В скобках после условия задачи указана фамилия того, кто предложил ее на обсуждение Методического совета.

Задания для разных этапов олимпиады существенно отличаются по уровню сложности. Наиболее сложные задачи предлагаются на заключительном этапе. Полностью справиться с заданием заключительного этапа могут только хорошо подготовленные учащиеся.

Многие задачи данного сборника были предложены членами Методического совета по математике Центрального оргкомитета олимпиад, который возглавляет чл.-кор. РАО, проф. МФТИ Г. Н. Яковлев. Однако следует заметить, что многие задачи являются продуктом коллективного труда. Обычно задача проходит довольно длинный путь от первоначальной идеи до окончательной редакции.

Всем авторам задач, членам Методического совета по математике, членам жюри Всероссийской олимпиады мы выражаем свою искреннюю признательность.

Все задачи сборника сопровождаются решениями или подробными пояснениями, но мы рекомендуем читателям, особенно школьникам, прежде чем заглядывать в ответ, приложить достаточно усилий и попытаться решить задачу самостоятельно. Только в этом случае вам будет гарантирован успех на предстоящих олимпиадах.

Желаем удачи!

Часть А

РЕГИОНАЛЬНЫЕ ОЛИМПИАДЫ

Условия задач

Олимпиада 1996 г.

8 класс

А1. Сколько существует четырехзначных чисел, не делящихся на 1000, у которых первая и последняя цифры четны? (*К. Кохась*)

А2. Восстановите пример на умножение натуральных чисел, если известно, что сумма цифр у обоих сомножителей одинакова. (*Н. Авилов*)

```
 × ***1
     2*
  -----
  **3**
+ *4**
  -----
  5****
```

А3. Круглый торт весом 1 кг разрезан на части тремя прямолинейными разрезами. Известно, что два из этих разрезов проходят через центр торта, а третий не проходит. Докажите, что вес по крайней мере одной из получившихся частей составляет не менее $\frac{1}{6}$ кг. (*И. Рубанов*)

А4. Дана полоска клетчатой бумаги длиной в 100 клеток. Двое играющих по очереди красят клетки в черный цвет, причем первый всегда красит четыре подряд стоящие клетки, а второй — три подряд стоящие. Уже покрашенную клетку второй раз красить нельзя. Проигрывает тот, кто не может сделать очередной ход. Кто выигрывает при правильной игре: первый или второй? (*Р. Женодаров*)

А5. Каркас куба с ребром длины 4 разделен точками на единичные отрезки (рис. А1). Сколько различных прямых определяют эти точки? (*Н. Авилов*)

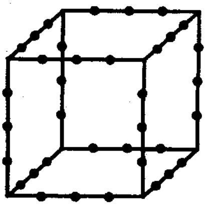

Рис. А1

А6. Дан правильный треугольник ABC. На продолжении стороны AC за точку C взята точка D, а на продолжении стороны BC за точку C — точка E так, что $BD = DE$. Докажите, что $AD = CE$. (*Л. Купцов*)

А7. Можно ли в кружочках (рис. А2) расставить все целые числа от 0 до 9 так, чтобы сумма трех чисел вдоль любого из шести отрезков была одной и той же? (*Жюри*)

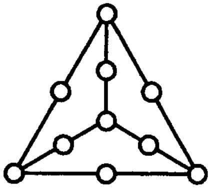

Рис. А2

А8. На горизонтальной поверхности лежат в ряд, касаясь друг друга, 100 одинаковых бревен, сплошь вымазанных дегтем. В ложбину между двумя самыми левыми бревнами кладут такое же, но чистое бревно и без проскальзывания катят его вправо до самой правой ложбины. Какая часть боковой поверхности бревна останется чистой к концу пути? (*И. Рубанов*)

9 класс

А9. Считается, что ученик A учится лучше ученика B, если в большинстве контрольных работ оценка у A выше, чем оценка у B. Оказалось, что ученик A учится лучше, чем B, ученик B — лучше, чем C, а ученик C — лучше, чем A. Приведите пример, когда такое возможно. (*А. Белов*)

А10. У трех братьев — Андрея, Василия и Сергея — дни рождения совпадают. Когда старшему из них, Андрею, исполнилось 12 лет, оказалось, что сумма возрастов всех трех братьев делится на 12. То же случилось, когда 12 лет исполнилось Василию. Докажите, что то же самое случится, когда 12 лет исполнится Сергею. (*А. Шаповалов*)

A11. Точечный прожектор освещает угол 45°. Какое наименьшее количество прожекторов можно поставить внутри квадратной площадки так, чтобы полностью ее осветить? (*Д. Кузнецов*)

A12. Дана белая доска размером 100×100 клеток. Двое по очереди красят ее клетки в черный цвет, причем первый всегда закрашивает квадрат 2×2, а второй — три клетки, образующие «уголок». Уже покрашенную клетку второй раз красить нельзя. Проигрывает тот, кто не может сделать очередной ход. Кто выигрывает при правильной игре: первый или второй? (*Р. Женодаров*)

A13. На доске было написано три числа. Когда их стерли и написали их произведение, сумму и сумму попарных произведений, оказалось, что на доске снова написаны те же числа. Какие числа могли быть первоначально написаны на доске? (*Н. Агаханов*)

A14. В треугольнике ABC проведена биссектриса BL. Через точку L к окружности, описанной около треугольника BLC, проведена касательная, пересекающая сторону AB в точке P. Докажите, что прямая AC касается окружности, описанной около треугольника BPL. (*Н. Нецветаев*)

A15. На некотором острове, где живут только рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда лгут, объявлен конкурс на должность губернатора. Каждый из n претендентов на эту должность сделал заявление, а именно: k-й претендент ($1 \leqslant k \leqslant n$) сказал: «Не считая меня, среди претендентов лжецов на k больше, чем рыцарей». Сколько человек претендует на должность губернатора? (*А. Шаповалов*)

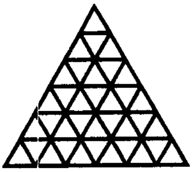

Рис. А3

A16. Двадцать восемь контрольных пунктов секретного объекта соединены системой коридоров (рис. А3). Каждый коридор соединяет два пункта и может быть освещен или затемнен. Первоначально весь объект затемнен. На каждом контрольном пункте есть переключатель, меняющий освещенность всех подходящих к нему коридоров на противоположную. Начальник охраны ходит по объекту и в некоторых контрольных пунктах меняет освещенность. Какое наибольшее количество коридоров он может сделать освещенными? (*Р. Женодаров*)

10 класс

А17. Решите уравнение $19[x] - 96\{x\} = 0$. (Через $[x]$ обозначена целая часть числа x, т. е. наибольшее целое число, не превосходящее x; через $\{x\}$ обозначена дробная часть числа x, т. е. $x - |x|$.) (*Д. Кузнецов*)

А18. Дан треугольник ABC, в котором $AB = BC$, $AB \neq AC$. На стороне AB выбрана точка E, а на продолжении стороны AC за точку A выбрана точка D так, что $\angle BDC = \angle ECA$. Докажите, что площади треугольников DEC и ABC равны. (*С. Токарев*)

А19. На доске через запятую выписаны числа $1, 2, \ldots, 99$. Двое играющих по очереди заменяют одну из имеющихся запятых на знак «+» или знак «·» («умножить»). После того как запятых не останется, игроки вычисляют значение полученного выражения. Если результат является нечетным числом, то выигрывает первый, а если четным — второй. Кто выигрывает при правильной игре? (*А. Шаповалов*)

А20. Сколько пар целых чисел $(x; y)$ удовлетворяет системе неравенств

$$\begin{cases} 2x \geqslant 3y, \\ 3x \geqslant 4y, \\ 5x - 7y \leqslant 20? \end{cases}$$

(*Н. Нецветаев*)

А21. Ученик Вася рвет листок с условиями задач областной олимпиады 1996 г. За одну секунду он может разорвать какой-то один из имеющихся клочков на две части либо разорвать на две части каждый из имеющихся клочков. Может ли Вася ровно через 500 с получить ровно 1996 клочков? (*Жюри*)

А22. См. условие задачи **А15.**

A23. В равнобедренную трапецию $ABCD$ ($AB = CD$) вписана окружность. Пусть M — точка касания окружности со стороной CD, K — точка пересечения окружности с отрезком AM, L — точка пересечения окружности с отрезком BM. Вычислите величину $\frac{AM}{AK} + \frac{BM}{BL}$. (*А. Орлов*)

A24. Какое наименьшее число круглых фишек диаметром $\sqrt{2}$ можно расставить на доске размером 7×7 клеток так, чтобы внутри каждой клетки хотя бы одна точка была накрыта некоторой фишкой? (Длина стороны клетки равна 1.) (*О. Богопольский*)

11 класс

A25. Найдите семь попарно различных натуральных чисел, сумма обратных величин которых была бы равна 1. (*А. Шаповалов*)

A26. Существует ли треугольная пирамида, каждое ребро основания которой видно из середины противолежащего бокового ребра под прямым углом? (*Н. Агаханов*)

A27. Известно, что некоторое число x встречается в наборе

$$\left\{a_1, \frac{a_1 + a_2}{2}, \frac{a_1 + a_2 + a_3}{3}, \ldots, \frac{a_1 + \ldots + a_{100}}{100}\right\}$$

по крайней мере 51 раз. Докажите, что среди чисел $a_1, \ldots, a_{100}$ есть два равных. (*Р. Женодаров*)

A28. Функция $f(x)$, определенная при всех действительных x, удовлетворяет следующему условию: уравнение $f(x) = px + q$ имеет решение тогда и только тогда, когда имеет решение уравнение $x^2 = px + q$. Докажите, что $f(x) = x^2$. (*А. Шаповалов*)

A29. Найдите все острые углы α, для которых

$$\sin(\sin\alpha + \alpha) = \cos(\cos\alpha - \alpha).$$ (*Н. Агаханов*)

А30. Сто первых натуральных чисел в каком-то порядке записали в ряд и вычислили 98 сумм, получаемых при сложении троек подряд идущих чисел. Какое наибольшее число нечетных сумм могло при этом получиться? (*Р. Женодаров*)

А31. Докажите, что одна из сторон выпуклого четырехугольника с диагоналями длины a и b не длиннее, чем $\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{4}}$. (*В. Дольников*)

А32. На плоскости расположено множество A, состоящее из нескольких прямых. Известно, что для любого его подмножества B, состоящего из k^2+1 ($k \geqslant 3$) прямых, можно выбрать k точек так, что любая прямая из множества B проходит хотя бы через одну из этих точек. Докажите, что и для всего множества A можно выбрать k точек так, чтобы любая прямая из A проходила через одну из них. (*В. Дольников*)

Олимпиада 1997 г.

8 класс

А33. Расположите натуральные числа от 1 до 100 в строку так, чтобы разность между любыми двумя соседними числами была равна 2 или 3. (*Н. Агаханов*)

А34. Медианой пятиугольника $ABCDE$ назовем отрезок, соединяющий вершину с серединой противолежащей стороны (A — с серединой CD, B — с серединой DE и т. д.). Докажите, что если четыре медианы выпуклого пятиугольника перпендикулярны сторонам, к которым они проведены, то таким же свойством обладает и пятая медиана. (*Р. Женодаров*)

А35. На клетчатой бумаге построены несколько прямоугольников со сторонами, параллельными линиям сетки и общим центром O в одном из углов сетки. За один вопрос про любой узел можно узнать, у скольких прямоугольников он лежит внутри. Как за четыре вопроса можно узнать, сколько прямоугольников содержат только один узел O? (*А. Шаповалов*)

А36. На автобусном маршруте 11 остановок, включая первую. На первой остановке в автобус сели 10 пассажиров, и на всех последующих остановках, кроме конечной, суммарное количество вошедших и вышедших пассажиров было равно 10. Кроме того, оказалось, что каждый пассажир ехал не более 5 остановок (т. е. от остановки с номером M не далее чем до остановки с номером $M + 5$), и ни в какой момент движения автобус не был пустым. Какое наибольшее количество пассажиров могло одновременно оказаться в автобусе во время движения? (*Е. Малинникова*)

А37. Найдите все натуральные числа, представимые в виде $\frac{mn + 1}{m + n}$, где m и n — натуральные числа. (*Л. Емельянов*)

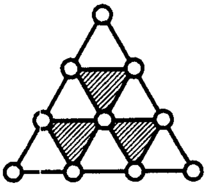

Рис. А4

А38. Можно ли какие-либо десять чисел расставить в кружки данной фигуры (рис. А4) так, чтобы сумма чисел в вершинах любого черного треугольника была равна 1996, а сумма чисел в вершинах любого белого треугольника была равна 1997? (*Н. Авилов*)

А39. На огороженном поле 1 км × 1 км были построены заборы, разделившие его на прямоугольные участки 5 м × 20 м и 6 м × 12 м. Какова общая длина построенных заборов? (*А. Шаповалов*)

А40. Двое по очереди записывают натуральные числа от 1 до 25 в клетки таблицы 5 × 5, причем каждое число может быть записано только один раз. Если после заполнения всей таблицы сумма чисел в каком-нибудь столбце или в строке равна 70, то выигрывает начинающий, в противном случае выигрывает его соперник. Кто выигрывает при правильной игре и как он должен играть, чтобы выиграть? (*Р. Женодаров*)

9 класс

А41. Даны корни x_0 и x_1, x_0 и x_2, ..., x_0 и x_n квадратных трехчленов $y = x^2 + a_1x + b_1$, $y = x^2 + a_2x + b_2$, ..., $y = x^2 + a_nx + b_n$. Найдите корни квадратного трехчлена

$$y = x^2 + \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}x + \frac{b_1 + b_2 + \ldots + b_n}{n}.$$

(*Н. Агаханов*)

А42. На какое наибольшее число натуральных слагаемых можно разложить число 96 так, чтобы все слагаемые были больше 1 и попарно взаимно просты? (*А. Шаповалов*)

А43. Назовем медианой пятиугольника $ABCDE$ отрезок, соединяющий его вершину с серединой противолежащей стороны (A — с серединой CD, B — с серединой DE и т. д.). Докажите, что если каждая медиана выпуклого пятиугольника делит пополам угол, из которого она проведена, и перпендикулярна стороне, к которой она проведена, то пятиугольник — правильный. (*Р. Женодаров*)

А44. На 115 карточках написаны целые числа 1, 2, ..., 115. Все карточки сложены в стопку так, что разность между числами на любых двух соседних карточках равна либо n, либо m. Оказалось, что для данных m и n существует только один способ сложить стопку с таким свойством. Какое число написано на нижней карточке стопки, если на верхней написано число 19? (*Р. Женодаров*)

А45. Можно ли представить число $1^2 + 2^2 + \ldots + 1997^2$ в виде суммы квадратов 1996 различных натуральных чисел? (*В. Сендеров*)

А46. В треугольнике ABC $AB > BC$ и на стороне AB взята точка P так, что $BP = BC$. Биссектриса BM пересекает описанную около треугольника ABC окружность в точке N. Докажите, что точки A, P, M, N лежат на одной окружности. (*Б. Кукушкин*)

А47. 38 попугаев передрались, измеряя рост удава. Каждый из них сумел выдрать одно перо из чьего-то хвоста, и у каждого попугая было выдрано одно перо. Кроме того, для любых трех попугаев можно указать четвертого, выдравшего перо у одного из них. Докажите, что для наведения порядка удав может проглотить не более 6 попугаев, а остальных рассадить поровну в две клетки так, чтобы ни один попугай не попал в одну группу со своим обидчиком. (*И. Акулич*)

А48. Из клетчатого квадрата $(n^2+1)\times(n^2+1)$ вырезали клетчатый квадрат $(n^2-1)\times(n^2-1)$ с тем же центром. На какое наименьшее число кусков нужно разрезать (по границам клеточек) образовавшуюся каемку так, чтобы из них можно было сложить квадрат $2n\times 2n$? (*Р. Женодаров, О. Крижановский*)

10 класс

А49. Найдите все функции f, удовлетворяющие при любых действительных x и y уравнению

$$f(x-y)=f(x)+f(y)-2xy.$$ (*Р. Женодаров*)

А50. Найдите тройки чисел a, b и c, являющихся степенями числа 5 с целыми неотрицательными показателями, такие, что одно из этих чисел получается выписыванием двух других подряд. (*В. Сендеров*)

А51. Диагонали параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке O. Пусть M и N — точки пересечения окружностей, одна из которых проходит через точки A и B, а другая — через точки C и D. Найдите геометрическое место точек N, если точка M лежит на отрезке OC и не совпадает с его концами. (*М. Сонкин*)

А52. См. условие задачи **А44**.

А53. Найдите все тройки ненулевых чисел a, b и c, образующих арифметическую прогрессию и таких, что из чисел $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$ и $\frac{1}{c}$ также можно составить арифметическую прогрессию. (*Н. Агаханов*)

А54. Сечение куба плоскостью — пятиугольник. Докажите, что площадь пятиугольника меньше произведения двух самых длинных его сторон. (*И. Акулич*)

А55. На клетчатой бумаге лежит квадрат с вершинами в узлах сетки. Его передвинули так, что две вершины снова попали в узлы. Докажите, что две другие вершины также попадут в узлы. (*А. Шаповалов*)

А56. В классе 20 учеников. Каждый дружит не менее чем с 10 другими. Докажите, что в этом классе можно выбрать две тройки учеников так, чтобы любой ученик из одной тройки дружил с любым учеником из другой тройки. (*А. Грибалко*)

11 класс

А57. Какие стороны может иметь треугольник ABC, если из отрезков, имеющих длины $\cos A$, $\cos B$ и $\cos C$, можно составить треугольник, равный данному? (*Н. Агаханов*)

А58. Назовем высотой $(2n + 1)$-угольника $A_1A_2...A_{2n+1}$ прямую, проходящую через вершину, перпендикулярную противолежащей стороне (через A_1 перпендикулярно $A_{n+1}A_{n+2}$ и т. д.). Докажите, что если $2n$ высот $(2n + 1)$-угольника проходят через одну точку, то и $(2n + 1)$-я высота проходит через ту же точку. (*Р. Женодаров*)

А59. Докажите, что число $1996^{1996} + 1$ не является степенью выше первой никакого натурального числа. (*В. Сендеров*)

А60. Двое игроков по очереди заполняют отличными от нуля числами таблицу $(2n + 1) \times (2n + 1)$. В конце игры (после заполнения всей таблицы) первому засчитывается число строк, в которых сумма равна нулю, а второму — число столбцов с нулевой суммой 0. Выигрывает тот, у которого засчитанное число больше. Может ли кто-то из игроков обеспечить себе выигрыш? (*О. Крижановский, И. Рубанов, Р. Женодаров*)

А61. Существует ли многочлен $P(x)$ такой, что $P(1) = 1$, $P(2) = 2$ и $P(n)$ — иррациональное число для любого целого n, отличного от 1 и 2? (*Н. Агаханов*)

А62. Точки A_1, B_1, C_1, D_1 — середины ребер SA, SB, SC и SD пирамиды $SABCD$. Известно, что отрезки AC_1, BD_1, CA_1 и DB_1 проходят через одну точку и имеют равные длины. Докажите, что $ABCD$ — прямоугольник. (*Н. Агаханов*)

А63. Докажите неравенство

$$\frac{x}{7+y^3+z^3}+\frac{y}{7+z^3+x^3}+\frac{z}{7+x^3+y^3}\leqslant\frac{1}{3},$$

где $0 \leqslant x, y, z \leqslant 1$. (*М. Сонкин*)

А64. Каждый из узлов бесконечного клетчатого листа бумаги раскрашен в один из двух цветов. Докажите, что существует бесконечное одноцветное множество узлов, имеющее центр симметрии. (*В. Протасов*)

Решения задач

Олимпиада 1996 г.

8 класс

А1. Ответ: 1996.

Первая цифра числа может быть любой из четырех (2, 4, 6 или 8), вторая и третья — любой из десяти каждая, а четвертая, если отказаться от условия «не делящихся на 1000», — любой из пяти (0, 2, 4, 6 или 8). Следовательно, четырехзначных чисел, в записи которых первая и последняя цифры четны, всего имеется $4 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 5 = 2000$; так как среди них четыре числа (2000, 4000, 6000 и 8000) делятся на 1000, то чисел, удовлетворяющих условию задачи, окажется $2000 - 4 = 1996$.

А2. Ответ:

$$\begin{array}{r} \times \begin{array}{r} 2231 \\ 26 \end{array} \\ \hline + \begin{array}{r} 13386 \\ 4462 \end{array} \\ \hline 58006 \end{array}$$

Перепишем условие примера в следующем виде:

$$\begin{array}{cccccc} & & x_1 & x_2 & x_3 & 1 \\ \times & & & & 2 & x_4 \\ \hline & x_5 & x_6 & 3 & x_7 & x_8 \\ + & x_9 & 4 & x_{10} & x_{11} & \\ \hline & 5 & x_{12} & x_{13} & x_{14} & x_{15} \end{array}$$

Очевидно, что $x_4 = x_8 = x_{15}$ и $x_{11} = 2$. Кроме того, ясно, что $x_1 = 1$ или $x_1 = 2$, так как иначе $2x_1 > 5$, что противоречит условию. Введем обозначения: $A = x_1x_2x_31$ и $B = 2x_4$.

а) Пусть $x_1 = 1(A = 1x_2x_31)$. Тогда $x_5 = 1$, $x_9 = 3$ и $3402 \leqslant 2A \leqslant 3492$. Отсюда

$$1701 \leqslant 1x_2x_31 \leqslant 1746.$$

Проверив три возможных варианта ($A = 1701$, $B = 27$; $A = 1711$, $B = 28$; $A = 1721$, $B = 29$), убеждаемся, что ни один из них не подходит.

б) Пусть $x_1 = 2$. Тогда $x_9 = 4$, $x_5 = 1$ и $x_2 = 2$. При этом $x_6 \leqslant 5$, так как иначе $x_6 + 4 > 9$, что противоречит условию. Но тогда $5 \leqslant x_4 \leqslant 7$. Проверив три возможных варианта ($A = 2221$, $B = 25$; $A = 2231$, $B = 26$; $A = 2241$, $B = 27$), во втором получаем необходимое соотношение.

А3. Первые два разреза разбивают торт на две пары симметричных частей: A и C, B и D (рис. А5). Третий разрез оставит нетронутой одну из этих частей, а три другие может поделить. Если после третьего разреза получится 5 или 6 частей, то, естественно, вес одной из них будет не менее $\frac{1}{6}$ кг (так как общий вес всех частей равен 1 кг).

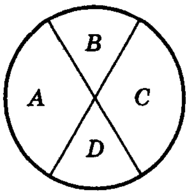

Рис. А5

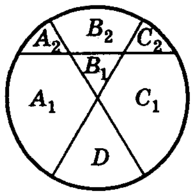

Рис. А6

Рассмотрим случай, когда после третьего разреза торт оказался поделенным на 7 частей (рис. А6).

Общий вес шести кусков: A_1, A_2, $B = B_1 \cup B_2$, C_1, C_2 и D равен 1 кг. Так как вес кусков B и D одинаков, то хотя бы один из кусков A_1, A_2, C_1, C_2 или D весит не менее $\frac{1}{6}$ кг. А это как раз те части, которые получились после третьего разреза.

А4. О т в е т: при правильной игре выигрывает второй.

Своим первым ходом второй игрок закрашивает три клетки, отступив на три клетки от одного из краев полосы (рис. А7) и объявив три незакрашенные крайние клетки «заповедником».

В дальнейшем второй игрок может делать любые возможные ходы, не вторгаясь в заповедник. Если таких ходов у него больше не осталось, то он закрашивает клетки заповедника. Разумеется, у первого игрока в такой ситуации ответного хода нет.

А5. О т в е т: 838 прямых.

Временно исключим из рассмотрения 12 прямых, проходящих через ребра куба. Тогда:

а) через каждую из 8 вершин куба (например, P на рис. А8) проходит $9 \cdot 3 + 4 = 44 - 13 = 31$ прямая;

б) через каждую из 36 «невершинных» точек (например, Q на рис. А9) проходит $11 \cdot 3 + 6 = 44 - 5 = 39$ прямых.

Рис. А7

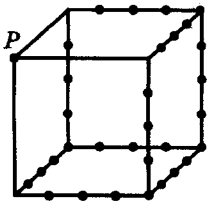

Рис. А8

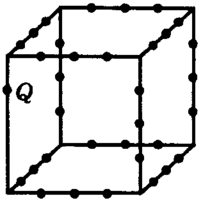

Рис. А9

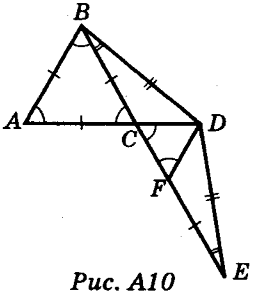

Рис. А10

Так как каждая из упомянутых прямых была учтена дважды, то общее число прямых составляет $\frac{1}{2}(8 \cdot 31 + 36 \cdot 39) + 12 = 838$.

А6. На отрезке CE отметим точку F такую, что $FE = BC$ (рис. А10). Треугольники BDC и EDF равны по первому признаку равенства треугольников. Отсюда $CD = DF$. Далее, поскольку $\angle DFC = \angle DCF = \angle ACB = 60°$, треугольник CDF — равносторонний. Поэтому $CF = CD$ и $AD = AC + CD = BC + CF = FE + CF = CE$, что и требовалось доказать.

А7. Ответ: нельзя.

Допустим, что это возможно. Пусть сумма чисел, стоящих на концах отрезков, равна A, сумма чисел, расположенных в серединах отрезков, равна B, а сумма трех чисел вдоль каждого отрезка равна S. Ясно, что

$$A + B = 0 + 1 + \ldots + 9 = 45.$$

Каждая концевая точка принадлежит ровно трем отрезкам, а все середины различны. Поэтому, сложив суммы вдоль всех шести отрезков, получим

$$3A + B = 6S.$$

Отсюда

$$A = 6S - (A + B) = 6S - 45.$$

Но это невозможно, так как $2A$ — четное число, а $6S - 45$ — нечетное. Полученное противоречие доказывает, что требуемая расстановка невозможна.

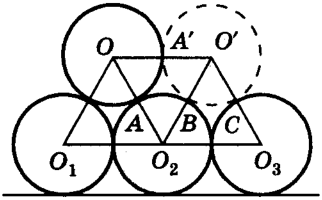

Рис. А11

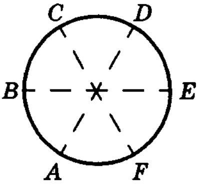

Рис. А12

А8. Ответ: половина поверхности.

Рассмотрим поперечные срезы бревен (рис. А11).

Пусть O — центр катящегося бревна в исходном положении, O' — его центр в тот момент, когда бревно ляжет в следующую ложбину, O_1, O_2, O_3 — центры первых трех неподвижных бревен. При перекатывании подвижного бревна из первой ложбины во вторую на нем испачкается дегтем дуга $BA' = AB$ (так как качение происходит без проскальзывания), где A и B — точки касания бревна, имеющего центр O_2, с бревнами, имеющими центры O и O' соответственно. Так как все бревна одинаковые и треугольники O_1OO_2, $OO'O_2$, $O_2O'O_3$, ... равны, то $\angle OO_2O' = 60°$. Поэтому $\smile BA' = \smile AB = 60°$. Следующая испачканная дуга на подвижном бревне начнется с точки C, отстоящей от точки B на 60° (так как $\angle BO'C = \angle O_2O'O_3 = 60°$) и т. д.

Таким образом, испачканные дуги меры 60° чередуются с чистыми дугами той же меры (рис. А12).

9 класс

А9. В трех контрольных работах оценки могли, например, распределиться следующим образом:

	К1	К2	К3
A	5	4	3
B	4	3	5
C	3	5	4

А10. Пусть Василию в день 12-летия Андрея исполняется x лет. Тогда Сергею в этот же день исполняется $12 - x$ лет. Составим следующую таблицу:

	A	B	C
День 12-летия Андрея	12	x	$12 - x$
День 12-летия Василия	$24 - x$	12	$24 - 2x$
День 12-летия Сергея	$12 + x$	$2x$	x

Числа второй строки получаются из первой добавлением к ней слагаемого $12 - x$, а числа третьей строки — добавлением к первой слагаемого x. Когда Василию будет 12 лет, Андрею и Сергею в сумме будет $48 - 3x$ лет, а следовательно, $3x$ делится на 12. Но в день 12-летия Сергея Андрею и Василию в сумме исполнится $12 + 3x$, а это число также делится на 12.

А11. Ответ: 4 прожектора.

Проведем две параллельные прямые, пересекающиеся со сторонами квадрата (рис. А13).

На отрезках AB и CD как на диаметрах построим две окружности. Возьмем на окружности с диаметром AB точку L, лежащую внутри квадрата и расположенную с отрезком CD по разные стороны от прямой AB. Поставив в эту точку два прожектора и повернув их соответствующим образом, мы осветим ту часть квадрата, которая попадет в угол ALB. Аналогично, поставив два других прожектора в точку M на второй окружности, мы осветим и оставшуюся часть квадрата (рис. А14).

Замечание. Если считать, что два прожектора в одну точку ставить нельзя, то их можно расположить, например, на биссектрисе угла ALB (рис. А15). При такой расстановке два прожектора вместе освещают даже бо́льшую площадь.

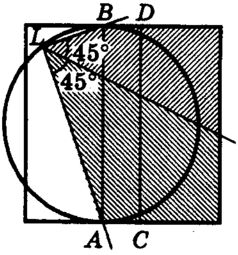

Рис. А13

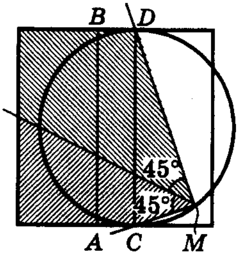

Рис. А14

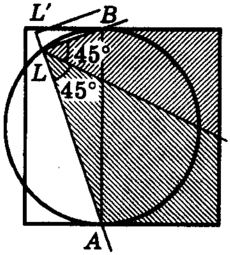

Рис. А15

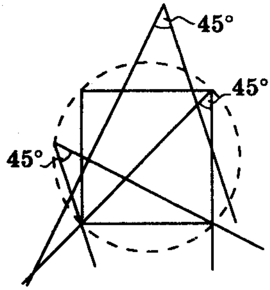

Рис. А16

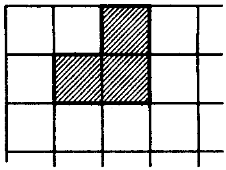

Рис. А17

Меньшим количеством прожекторов обойтись нельзя. В этом случае по крайней мере один из них должен освещать вершины двух углов квадрата, а значит, и одну из сторон целиком. Следовательно, прожектор располагается на окружности, описанной около квадрата, или вне ее, что противоречит условию задачи (рис. А16).

А12. Ответ: второй.

В одном из углов доски второй играющий своим первым ходом закрашивает три клетки в прямоугольнике 2×3 (рис. А17), а три оставшиеся клетки из этого прямоугольника объявляет «заповедником».

В дальнейшем второй делает любые возможные ходы, не затрагивающие клетки заповедника. Если такой ход становится невозможным, то он закрашивает клетки заповедника. Легко понять, что ответного хода у первого играющего нет.

А13. Ответ: -1, -1 и 1 или 0, 0 и x, где x — любое действительное число.

Обозначим первоначально написанные на доске числа через a, b, c. По условию множества $\{a, b, c\}$ и $\{abc, a + b + c, ab + bc + ac\}$ совпадают. Без ограничения общности можно считать, что $a = abc$, т. е. либо $a = 0$, либо $a \neq 0$ и $bc = 1$. В первом случае совпадают множества $\{b, c\}$ и $\{b + c, bc\}$. Снова без ограничения общности можно считать, что $b = b + c$, т. е. $c = 0$. Следовательно, в рассматриваемом случае первоначальное множество чисел имеет вид $\{0, b, 0\}$. , что при любом $b \in \mathbf{R}$ указанное множество удовлетворяет условию задачи.

Во втором случае совпадают множества $\left\{a, \frac{1}{c}, c\right\}$ и $\left\{a, a + \frac{1}{c} + c, \frac{a}{c} + 1 + ac\right\}$. Поэтому должны совпадать множества $\left\{\frac{1}{c}, c\right\}$ и $\left\{a + \frac{1}{c} + c, \frac{a}{c} + 1 + ac\right\}$. Отсюда следует, что либо $\frac{1}{c} = a + \frac{1}{c} + c$, $c = \frac{a}{c} + 1 + ac$, либо $\frac{1}{c} = \frac{a}{c} + 1 + ac$, $c = a + \frac{1}{c} + c$. Обе возможности дают значения $a = 1$, $c = -1$, и, значит, $b = \frac{1}{c} = -1$.

А14. Достаточно доказать, что $\angle PLA = \angle PBL$ (рис. А18).

Пусть $\alpha = \angle ABL = \angle LBC$, $\beta = \angle BCL$. Поскольку PL касается окружности, описанной около треугольника BLC, заключаем, что $\angle PLB = \angle BCL = \beta$. Угол ALB — внешний для треугольника BLC, поэтому $\angle ALB = \alpha + \beta$. С другой стороны, $\angle ALB = \angle PLA + \beta$, следовательно, $\angle PLA = \alpha = \angle PBL$.

А15. Ответ: один, два или три человека.

Легко понять, что среди претендентов не более одного рыцаря. Если все претенденты — лжецы, то $r = 1$, так как в противном случае предпоследний лжец говорит правду. Если же среди претендентов есть рыцарь, то он является $(n - 1)$-м претендентом. Докажем, что $n \leqslant 3$. Предположим, наоборот, что $n > 3$. Тогда $(n - 3)$-й претендент — лжец. С другой стороны, кроме него имеется $n - 2$ лжецов и один рыцарь, так что $(n - 3)$-й претендент сказал правду. Получили противоречие. Остается заметить, что случаи $n = 2$ и $n = 3$ действительно реализуются: рыцарь, лжец ($n = 2$) и лжец, рыцарь, лжец ($n = 3$).

А16. Ответ: 42.

Заметим, что в любом треугольнике, образованном тремя коридорами, может быть освещено 0 или 2 кори-

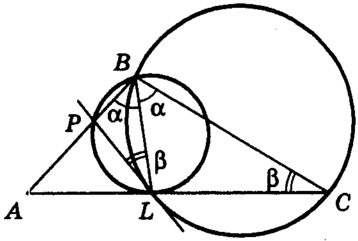

Рис. А18

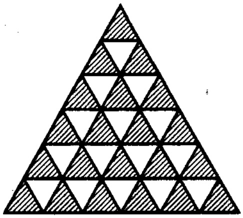
Рис. А19

дора, если первоначально все образующие треугольник коридоры были затемнены. Разобьем весь объект на 21 треугольник, образованные коридорами (на рис. А19 эти треугольники заштрихованы).

Поскольку в каждом таком треугольнике не более двух освещенных коридоров, всего на объекте имеется не более 42 освещенных коридоров. Если переключить по одному разу все переключатели во 2, 4 и 6-м горизонтальных рядах (рис. А19), то будут освещены ровно 42 коридора.

10 класс

А17. Ответ: $\left\{0,\ 1\frac{19}{96},\ 2\frac{38}{96},\ 3\frac{57}{96},\ 4\frac{76}{96},\ 5\frac{95}{96}\right\}$.

Запишем уравнение в виде

$$19[x] = 96\{x\}.$$

Так как $\{x\} \in [0; 1)$, то для решений уравнения имеем $19[x] \in [0; 96)$. Отсюда $[x] \in [0; \frac{96}{19})$, т. е. $[x]$ может быть равна 0, 1, 2, 3, 4 и 5, а $\{x\}$ соответственно равна 0, $\frac{19}{96}$, $\frac{38}{96}$, $\frac{57}{96}$, $\frac{76}{96}$, $\frac{95}{96}$.

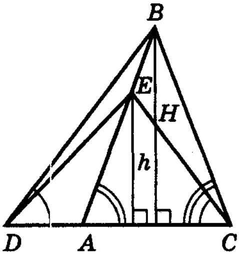

Рис. А20

А18. Треугольники AEC и BDC (рис. А20) подобны, так как $\angle ECA = \angle BDC$ и $\angle EAC = \angle DCB$.

Пусть h и H — длины перпендикуляров, опущенных из точек E и B на прямую AC. Тогда в силу подобия указанных треугольников имеем $\frac{h}{AC} = \frac{H}{DC}$. Значит, $\frac{1}{2}h \cdot DC = \frac{1}{2}H \cdot AC$, т. е. $S_{\Delta DEC} = S_{\Delta ABC}$.

A19. О т в е т: выигрывает второй игрок.

Для достижения успеха второй игрок может пользоваться симметричной стратегией: если первый ставит какой-то знак между числами k и $k + 1$, то второй ставит такой же знак между числами $99 - k$ и $100 - k$. Выражение, которое получится в конце игры, будет содержать несколько слагаемых-произведений, причем слагаемое, содержащее число 50, является четным, а остальные слагаемые естественным образом разобьются на пары «симметричных» слагаемых одинаковой четности. Таким образом, выражение, полученное в конце игры, окажется четным.

A20. О т в е т: 231 пара.

Произведем замену переменных:

$$\begin{cases} u = 2x - 3y, \\ v = 3x - 4y, \end{cases} \text{ или, что то же, } \begin{cases} x = 3v - 4u, \\ y = 2v - 3u. \end{cases}$$

Как видим, паре целых чисел (x, y) соответствует пара целых чисел (u, v) и наоборот. В новых переменных данная система неравенств примет вид

$$\begin{cases} u \geqslant 0, \\ v \geqslant 0, \\ u + v \leqslant 20. \end{cases}$$

Достаточно найти количество пар целых чисел (u, v), удовлетворяющих этой системе.

Заметим, что в плоскости (u, v) полученная система задает треугольник ABC (рис. A21). На гипотенузе AC этого треугольника лежит 21 точка с целочисленными координатами, а треугольник ABC и равный ему треугольник ACD вместе составляют квадрат $ABCD$ со стороной 20, который содержит 441 точку с целочисленными координатами. Уда-

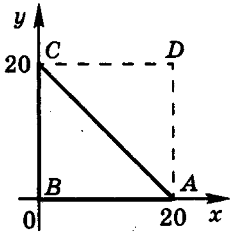

Рис. A21

лив из этого квадрата диагональ AC, получаем, что «половина» квадрата содержит 210 таких точек. Итак, в треугольнике ABC содержится 231 точка с целочисленными координатами: 21 на прямой AC и 210 ниже этой прямой.

А21. Ответ: может.

Первые 488 раз Вася рвет на две части один из клочков, а последние два раза рвет пополам все клочки.

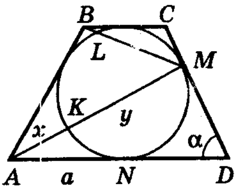

Рис. А22

А22. См. решение задачи **А15**.

А23. Ответ: 10.

Пусть N — середина стороны AD, $a = AN$, $x = AK$, $y = AM$, $\alpha = \angle ADM$ (рис. А22). Тогда $ND = DM = a$, и по теореме косинусов из треугольника AMD получаем

$$y^2 = 4a^2 + a^2 - 4a^2\cos\alpha = a^2(5 - 4\cos\alpha).$$

С другой стороны, по теореме о секущей и касательной имеем

$$xy = a^2.$$

Поэтому $\dfrac{AM}{AK} = \dfrac{y}{x} = \dfrac{y^2}{xy} = 5 - 4\cos\alpha$. Аналогично, в треугольнике BCM находим $\dfrac{BM}{BL} = 5 + 4\cos\alpha$. Итак, $\dfrac{AM}{AK} + \dfrac{BM}{BL} = 10$.

А24. Ответ: 9 фишек.

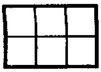

Рис. А23

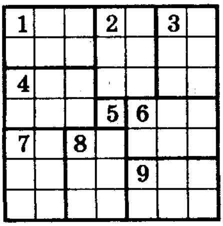

Рис. А24

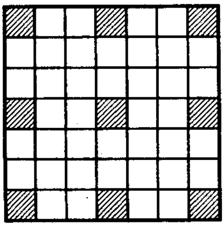

Рис. А25

Очевидно, что одну фишку можно поставить так, что она накроет точки внутри каждой клетки фигуры, изображенной на рисунке А23. Поэтому, как показано на рисунке А24, достаточно девяти фишек.

Меньшим количеством фишек обойтись нельзя. Рассмотрим 9 клеток, отмеченных на рисунке А25.

Эти клетки удалены друг от друга на расстояние, не меньшее чем 2, поэтому одна фишка не может задевать две клетки одновременно. Следовательно, фишек должно быть не меньше, чем отмеченных клеток.

11 класс

А25. Ответ: а) 2, 3, 12, 18, 72, 108, 216; б) 2, 4, 8, 16, 32, 48, 96.

Прежде всего заметим, что $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 1$. Затем заменим $\frac{1}{6}$ на $\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6}$; ту же процедуру проведем с $\frac{1}{36}$. Получим следующую сумму:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{6^2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{6^2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{6^2} \cdot \frac{1}{6}.$$

Другой ответ можно получить, заменив в равенстве $1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16}$ последнее слагаемое на $\frac{1}{16} \times$ $\times \frac{1}{2} + \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{6}$.

А26. Ответ: нет.

I способ. Пусть $SABC$ — пирамида такая, что $\angle AB_1C = \angle BA_1C = \angle AC_1B = 90°$, где A_1, B_1, C_1 — середины ребер SA, SB и SC (рис. А26).

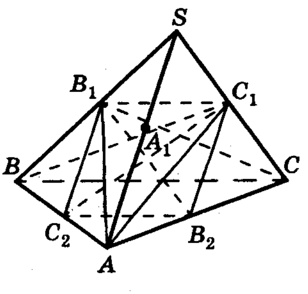

Рис. А26

Пусть B_2 и C_2 — середины ребер AC и AB. Тогда B_1B_2 — медиана прямоугольного треугольника AB_1C, проведенная к гипотенузе AC, поэтому $B_1B_2 = \frac{1}{2}AC$. Аналогично $C_1C_2 = \frac{1}{2}AB$. Но четырехугольник $C_2B_1C_1B_2$ — параллелограмм, так как B_1C_2 и C_1B_2 — средние линии треугольников ABS и ACS с общим основанием. Согласно свойству параллелограмма $B_1B_2^2 + C_2C_2^2 = 2(B_1C_1^2 + B_1C_2^2)$, т. е. $\frac{1}{4}AC^2 + \frac{1}{4}AB^2 = 2(\frac{1}{4}BC^2 + \frac{1}{4}AS^2)$, или

$$AC^2 + AB^2 = 2(BC^2 + AS^2). \qquad (1)$$

Аналогично находим

$$AB^2 + BC^2 = 2(AC^2 + BS^2), \qquad (2)$$
$$BC^2 + AC^2 = 2(AB^2 + CS^2). \qquad (3)$$

Складывая равенства (1), (2) и (3), получаем $2(AS^2 + BS^2 + CS^2) = 0$, что невозможно.

II способ. Пусть $\overrightarrow{SA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{SB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{SC} = \vec{c}$, тогда $\overrightarrow{AC_1} = -\vec{a} + \frac{\vec{c}}{2}$, $\overrightarrow{BC_1} = \vec{b} + \frac{\vec{c}}{2}$, и из предположения о том, что $\overrightarrow{AC_1} \perp \overrightarrow{BC_1}$, следует $\overrightarrow{AC_1} \cdot \overrightarrow{BC_1} = 0$, т. е. $\vec{a} \cdot \vec{b} - \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} + \frac{1}{4}\vec{c} \cdot \vec{c} = 0$. Запишем еще два аналогичных равенства и, сложив их, получаем: $\frac{1}{4}(\vec{a} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{b} + \vec{c} \cdot \vec{c}) = 0$. Полученное противоречие означает, что хотя бы один из трех углов не является прямым.

A27. I способ. Обозначим через b_k среднее арифметическое чисел $a_1, a_2, \ldots, a_k$. Пусть x — это число, которое входит в данный набор $A = \{b_1, b_2, \ldots, b_{100}\}$ 51 раз. Докажем, что среди чисел $a_1, a_2, \ldots, a_{100}$ найдутся два числа, равных x.

Сначала покажем, что если $b_k = b_{k+1} = x$, то $a_{k+1} = x$. Действительно, из равенства $b_k = \dfrac{a_1 + \ldots + a_k}{k} = x$ следует, что $a_1 + \ldots + a_k = kx$, поэтому $b_{k+1} =$

$= \dfrac{a_1 + \ldots + a_k + a_{k+1}}{k+1} = \dfrac{kx + a_{k+1}}{k+1}$, откуда, учитывая, что $b_{k+1} = x$, находим $a_{k+1} = (k+1)x - kx = x$.

Теперь предположим, что среди чисел $a_1, \ldots, a_{100}$ не найдется двух, равных x, и рассмотрим два случая.

1) $a_1 = x$, тогда $a_m \neq x$, при $m \geqslant 2$. Из того, что $a_2 \neq x$, следует $b_2 \neq x$, поэтому в наборе $A' = \{b_3, \ldots, b_{100}\}$ 50 раз встречается число x. Всего в наборе A' имеется 98 чисел, поэтому какие-то из 50 чисел, равных x, окажутся соседними: $b_k = b_{k+1} = x$. Но тогда $a_{k+1} = x$ — получаем противоречие.

2) $a_1 \neq x$, тогда в наборе $A'' = \{b_2, \ldots, b_{100}\}$ 51 раз встречается число x. Если в наборе A'' нет двух пар соседних чисел, равных x, то чисел, отличных от x, должно быть не менее 49. Снова получаем противоречие, так как в этом случае набор A'' должен содержать по крайней мере $51 + 49 = 100$ чисел.

Итак, сделанное нами предположение неверно, и поэтому найдутся числа a_m и a_n, равные x.

II способ. Рассмотрим набор чисел $C = \left\{c_1, \dfrac{c_1 + c_2}{2}, \ldots, \dfrac{c_1 + \ldots + c_{100}}{100}\right\}$, где $c_k = a_k - x$. В этом наборе каждое число меньше соответствующего числа набора $A = \left\{a_1, \dfrac{a_1 + a_2}{2}, \ldots, \dfrac{a_1 + \ldots + a_{100}}{100}\right\}$ на x, поэтому в наборе C число 0 встречается 51 раз. То есть среди сумм c_1, $c_1 + c_2$, $c_1 + c_2 + c_3$, ..., $c_1 + \ldots + c_{100}$ имеется 51 нулевая: $c_1 + \ldots + c_l = 0$, $c_1 + \ldots + c_l + c_{l+1} + \ldots + c_m = 0$, $c_1 + \ldots + c_m + c_{m+1} + \ldots + c_n = 0$, ..., $c_1 + \ldots + c_s = 0$. Но тогда $c_1 + \ldots + c_l = 0$, $c_{l+1} + \ldots + c_m = 0$, $c_{m+1} + \ldots + c_n = 0$, ..., $c_{r+1} + \ldots + c_s = 0$. Покажем, что из полученных 51 нулевых сумм по крайней мере две содержат только по одному слагаемому. Действительно, если это не так, то в 50 суммах не менее чем по два слагаемых, для чего необходимо по крайней мере $1 + 2 \cdot 50 = 101$ число, — получаем противоречие. Итак, мы показали, что какие-то два числа c_m и c_n равны нулю. Значит, $a_m = a_n = x$.

ем противоречие. Итак, мы показали, что какие-то два числа c_m и c_n равны нулю. Значит, $a_m = a_n = x$.

А28. Разрешимость уравнения $f(x) = px + q$ означает, что прямая $y = px + q$ пересекается с графиком функции $y = f(x)$.

Предположим, что для некоторого x_0 выполняется неравенство $f(x_0) < x_0^2$. Тогда точка $(x_0, f(x_0))$ лежит ниже графика параболы $y = x^2$ и поэтому через точку $(x_0; f(x_0))$ можно провести прямую, не пересекающуюся с ней. Поэтому уравнение $f(x) = px + q$ имеет корень x_0, а уравнение $x^2 = px + q$ корней не имеет. Следовательно, $f(x) \geqslant x^2$ для всех x.

Покажем, что неравенство $f(x_0) > x_0^2$ также невозможно. Проведем касательную $y = px + q$ к параболе в точке $(x_0, x^2{}_0)$ (ее уравнение $y = 2x_0x - x_0^2$). Тогда уравнение $x^2 = px + q$ имеет единственный корень x_0. С другой стороны, при всех $x \neq x_0$ имеем $x^2 > px + q$.

Значит,

$$f(x) \geqslant c^2 > px + q \text{ при } x \neq x_0$$

и

$$f(x_0) > x_0^2 = px_0 + q,$$

т. е. $f(x) > px + q$ для всех x и уравнение $f(x) = px + q$ решений не имеет. Получили противоречие.

Итак, $f(x) = x^2$.

А29. Ответ: $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

Из тождества

$$\sin(\sin\alpha + \alpha) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \sin\alpha - \alpha\right)$$

следует, что данное равенство выполняется в двух случаях:

а) $2\pi n + \frac{\pi}{2} - \sin\alpha - \alpha = \cos\alpha - \alpha,\ n \in \mathbf{Z}$,

б) $2\pi n + \frac{\pi}{2} - \sin\alpha - \alpha = \alpha - \cos\alpha,\ n \in \mathbf{Z}$.

В случае а) получаем равенство

$$\sin\alpha + \cos\alpha = \frac{\pi}{2} + 2\pi n.$$

Но это равенство невозможно, так как

$$|\sin\alpha+\cos\alpha| = \sqrt{2}\,|\sin(\alpha+\frac{\pi}{4})| \leqslant \sqrt{2} < \frac{\pi}{2} \leqslant |\frac{\pi}{2}+2\pi n|.$$

В случае б) получаем

$$2\alpha+\sin\alpha-\cos\alpha=\frac{\pi}{2}+2\pi n. \qquad (1)$$

Рассмотрим функцию

$$f(x)=2x+\sin x-\cos x$$

на промежутке $[0, \frac{\pi}{2}]$. Легко проверить, что на этом промежутке она строго монотонно возрастает. Следовательно, выполняются неравенства

$$-1=f(0)<f(x)<f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\pi+1,$$

и, значит, в равенстве (1) $n=0$ и из монотонности $f(x)$ следует, что уравнение (1) при $n=0$ имеет ровно одно решение.

Легко проверить, что при этом решением является $\alpha=\frac{\pi}{4}$.

А30. Ответ: 97 сумм.

Сначала покажем, что все суммы не могут быть нечетными. Действительно, пусть все суммы нечетны. Это возможно только, если числа идут в следующем порядке:

а) *нннн...*; б) *нччнччн...*; в) *чннчннч...*; г) *ччнччнч...* .

В первом случае получаем, что все числа от 1 до 100 должны быть нечетны, а в остальных — что четных чисел больше, чем нечетных, т. е. приходим к противоречию.

Покажем теперь, как расставить числа, чтобы получить 97 нечетных сумм:

$$\underbrace{\textit{нччнччнчч}\ldots\textit{нчч}}_{75\ \text{чисел}}\ \underbrace{\textit{нн}\ldots\textit{н}}_{25\ \text{чисел}}.$$

Четной окажется только 75-я сумма.

А31. I способ. Пусть $AC=b\geqslant a=BD$. Не умаляя общности, будем считать, что $\angle AOB\leqslant\frac{\pi}{2}$ (рис. А27).

Если $OA \leqslant \frac{b}{2}$ и $OB \leqslant \frac{a}{2}$ или $OC \leqslant \frac{b}{2}$ и $OD \leqslant \frac{a}{2}$, то

$AB \leqslant \sqrt{OA^2 + OB^2} \leqslant \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2}$ или $CD \leqslant \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2}$ и требуемое утверждение доказано. Поэтому предположим, что $OB \leqslant \frac{a}{2}$, а $OA > \frac{b}{2}$. Тогда угол BAO — также острый, поскольку в треугольнике ABO против угла BAO лежит меньшая сторона: $OB \leqslant \frac{a}{2} \leqslant \frac{b}{2} < OA$. Следовательно, основание высоты BH будет лежать на стороне AO. Но тогда либо $AH \leqslant \frac{b}{2}$, либо $HC \leqslant \frac{b}{2}$. Пусть $AH \leqslant \frac{b}{2}$ (если $HC \leqslant \frac{b}{2}$, то рассуждения аналогичны). Имеем

$$AB = \sqrt{AH^2 + BH^2} \leqslant$$
$$\leqslant \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^2}{4}} = \frac{\sqrt{b^2 + a^2}}{2},$$

так как $BH \leqslant BO \leqslant \frac{a}{2}$. Утверждение доказано.

II способ. Предположим, что все стороны четырехугольника $ABCD$ имеют длину бо́льшую, чем $p = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{4}}$. Тогда точки B и D лежат вне окружностей радиуса $R = p$ с центрами в точках A и C, причем $AC = a$ (рис. А28).

Пусть E и F — точки пересечения указанных окружностей, M — точка пересечения AC и EF, тогда

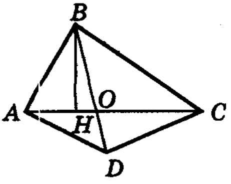

Рис. А27

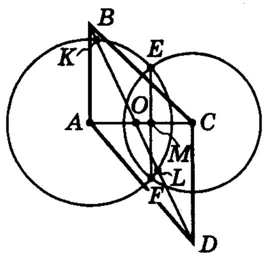

Рис. А28

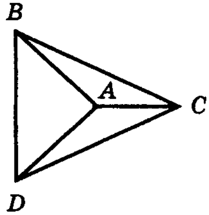

Рис. А29

$EF = 2EN = 2\sqrt{p^2 - \left(\frac{a}{b}\right)^2} = b$. Покажем, что $BD > EF$. Действительно, если O — точка пересечения диагоналей AC и BD, то при $AO \leqslant AM$ первая окружность высекает на BD хорду, длина которой не меньше EF (хорда KL на рис. А28), а при $AO > AM$ — вторая окружность. Мы пришли к противоречию, так как $BD = b = EF$, поэтому хотя бы одна сторона четырехугольника не больше p.

Замечание. Для невыпуклого четырехугольника утверждение неверно (рис. А29).

А32. Будем говорить, что:

а) прямые множества X прикрепляются к плоскости k кнопками, если существуют k точек на плоскости таких, что каждая прямая множества X проходит хотя бы через одну из этих точек;

б) выполняется утверждение $S(n, k)$, если из того, что любые n прямых множества X прикрепляются к плоскости k кнопками, следует, что и все прямые множества X прикрепляются k кнопками.

Тогда доказательство утверждения задачи заключается в проверке справедливости $S(n, k)$, где $n = k^2 + 1$, $k \geqslant 3$.

Его справедливость установим следующим образом: покажем, что верно $S(3, 1)$, и докажем, что $S(3, 1) \Rightarrow S(6, 2)$, $S(6, 2) \Rightarrow S(10, 3)$, ..., $S(k^2 + 1, k) \Rightarrow$ $\Rightarrow S((k + 1)^2 + 1, k + 1)$ при $k \geqslant 3$.

Утверждение $S(3, 1)$ очевидно, так как оно означает, что если любые три прямые некоторого множества проходят через одну точку, то и все прямые множества проходят через одну точку.

Докажем теперь, что $S(k^2 + 1, k) \Rightarrow S((k + 1)^2 + 1, k + 1)$, $k \geqslant 3$; утверждения $S(3, 1) \Rightarrow S(6, 2)$ и $S(6, 2) \Rightarrow S(10, 3)$, доказываются аналогично, в фигурных скобках мы будем указывать соответствующие изменения в выражениях при $k = 1$ и $k = 2$.

Пусть выполнено $S(k^2 + 1, k)$ $\{S(3, 1); S(6, 2)\}$ и A — множество прямых, любые $(k + 1)^2 + 1$ $\{6; 10\}$ прямые которого прикрепляются $k + 1$ $\{2; 3\}$ кнопками. Нам нужно доказать, что все прямые множества A прикрепляются $k+1$ $\{2; 3\}$ кнопками. Рассмотрим произвольные $(k+1)^2+1$ $\{6; 10\}$ прямые из A и $k+1$ $\{2; 3\}$ кнопки, которые их прикрепляют. Тогда одна из них (кнопка P) прикрепляет по крайней мере $k+2$ прямые (если бы такая кнопка не нашлась, то можно было бы прикрепить не более $(k+1) \cdot (k+1)$ прямых). Обозначим через M множество всех прямых из A, прикрепленных кнопкой P, а через A' — множество прямых из A, не входящих в M. Покажем, что для A' выполняется условие: любые k^2+1 $\{3; 6\}$ прямых из A' прикрепляются k $\{1; 2\}$ кнопками. В самом деле, выберем в A' любые k^2+1 $\{3; 6\}$ прямых, добавим к ним все прямые множества M и, если необходимо, другие прямые множества A' так, чтобы получить $(k+1)^2+1$ $\{6; 10\}$ прямых. Тогда, согласно выбору множества A, эти $(k+1)^2+1$ $\{6; 10\}$ прямых можно прикрепить $k+1$ $\{2; 3\}$ кнопками. Пусть N — множество этих кнопок. Покажем, что $P \in N$. Действительно, кнопка P прикрепляет не менее $k+2$ прямых, поэтому если $P \notin N$, то каждую из этих прямых нужно прикреплять отдельной кнопкой, т. е. потребуется не менее $k+2$ кнопок, а мы предположили, что достаточно $k+1$ кнопки. Итак, $P \in N$.

Значит, остальными (кроме P) k кнопками прикрепляются все прямые из A, не прикрепленные кнопкой P, т. е. и исходные k^2+1 $\{3; 6\}$ прямых из A'. Но, как мы предположили ранее, выполнено условие $S(k^2+1, k)$ $\{S(3, 1); S(6, 2)\}$ — это означает, что все прямые из A' прикрепляются k кнопками. Тогда все прямые из A прикрепляются этими k кнопками и кнопкой P, т. е. $k+1$ кнопкой. Тем самым мы установили справедливость утверждений $S((k+1)^2+1, k+1)$, $k \geqslant 3$ $\{S(6, 2); S(10, 3)\}$, что, как было отмечено выше, завершает доказательство утверждения задачи.

Олимпиада 1997 г.

8 класс

А33. Например, так: 1, 3, 5, 2, 4, 6, 8, 10, 7, 9, 11, ..., 96, 98, 100, 97, 99 (в каждой пятерке порядок расположения чисел $5k+1$, $5k+3$, $5k+5$, $5k+2$, $5k+4$).

A34. Условие перпендикулярности медианы пятиугольника и его противолежащей стороны равносильно тому, что диагонали, проведенные из соответствующей вершины, равны. Поэтому если медианы, проведенные из вершин A, B, C и D (рис. A30), перпендикулярны противолежащим сторонам, то выполняются равенства $AC = AD$, $BE = BD$, $CA = CE$, $DB = DA$. Отсюда следует, что $CE = BE$, т. е. медиана, проведенная из вершины E, также перпендикулярна противолежащей стороне.

A35. Ответ: нужно задать вопросы про узлы A, B, C и O (рис. A31). Если $n(P)$ — число прямоугольников, содержащих точку P, то искомое число x равно

$$n(O) + n(B) - n(A) - n(C).$$

Ясно, что все прямоугольники, содержащие узлы, отличные от O, включают хотя бы один из узлов A и C.

Сумма $n(A) + n(C)$ включает все такие прямоугольники, но при этом те прямоугольники, которые содержат оба узла A и C, подсчитаны дважды. Заметим, что прямоугольники, содержащие одновременно A и C, — это прямоугольники, содержащие узел B. Поэтому $n(A) + n(C) - n(B)$ — число прямоугольников, содержащих узлы, отличные от O, и, значит, искомое число есть $n(O) - (n(A) + n(C) - n(B))$.

A36. Ответ: 48.

Пусть $X(M)$ — число пассажиров в автобусе во время движения после остановки с номером M. Во-первых, $X(M) \leqslant 50$, так как вместе могут ехать только пассажиры, севшие в автобус не более чем пятью остановками ранее. Во-вторых, $X(M)$ четно, так как число $n - (10 - n) = 2n - 10$, показывающее изменение количества пассажиров в автобусе на остановке, четно. Поэтому если

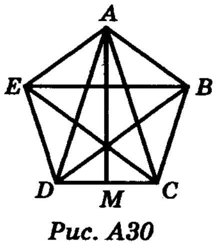

Рис. A30

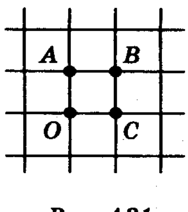

Рис. A31

мы покажем, что $X(M) < 50$, то отсюда будет следовать, что $X(M) \leqslant 48$. Но равенство $X(M) = 50$ возможно только в том случае, когда на каждой из пяти предыдущих остановок садились по 10 пассажиров. Это означает, что $M = 5$, так как в противном случае $X(M - 4) = 0$, что противоречит условию. Тогда на 6-й остановке должны были выйти все 10 пассажиров, севших на 2-й, и т. д., на 10-й — последние 10 пассажиров, и, следовательно, до конечной остановки автобус ехал бы пустым. Итак, $X(M) \leqslant 48$. Вот пример посадки и высадки пассажиров, когда $X(5) = 48$.

Номер остановки	Вошли	Вышли	$X(M)$
1	$A_1, \ldots, A_{10}$	0	10
2	$B_1, \ldots, B_{10}$	0	20
3	$C_1, \ldots, C_{10}$	0	30
4	$D_1, \ldots, D_{10}$	0	40
5	$E_1, \ldots, E_9$	A_{10}	48
6	F_1	$A_1, \ldots, A_9$	40
7	0	$B_1, \ldots, B_{10}$	30
8	0	$C_1, \ldots, C_{10}$	20
9	0	$D_1, \ldots, D_{10}$	10
10	G_1	$E_1, \ldots, E_9$	2

А37. Ответ: любое натуральное число.

I способ. Достаточно заметить, что если $m = 2k - 1$, $n = 2k + 1$, то $\dfrac{mn + 1}{m + 1} = \dfrac{4k^2 - 1 + 1}{4k} = k$.

II способ. Найдем решение уравнения $\dfrac{mn + 1}{m + n} = k$.

Имеем $mn + 1 = km + kn$, $m = \dfrac{kn - 1}{n - k}$. Тогда, если $n = k + 1$, то m — целое, $m = k^2 + k - 1$.

А38. Ответ: нельзя.

Предположим, что мы расставили искомым образом 10 чисел. Пусть сумма семи чисел, расположенных в вершинах центрального шестиугольника и в его центре, равна S, а его центральное число есть x. Тогда сумма всех чисел в вершинах трех черных треугольников равна $S + 2x$ и по условию это число равно $3 \cdot 1996$. В то же время сумма чисел в вершинах трех белых треугольников, входящих в шестиугольник, также равна $S + 2x$, но по условию это число равно $3 \cdot 1997$, т. е. получили противоречие.

А39. Ответ: 248 000 м.

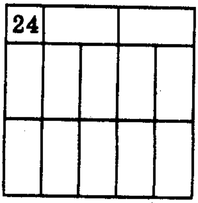

Рис. А32

Заметим, что периметр любого прямоугольного участка численно вдвое меньше его площади. Площадь всех участков равна 1 000 000 м^2, поэтому сумма периметров участков равна 500 000 м. Но любой забор, кроме внешнего, имеющего длину 4000 м, является границей двух участков, поэтому в указанной сумме он подсчитан дважды. Значит, было построено $\dfrac{500\,000 - 4000}{2} = 248\,000$ м заборов.

А40. Ответ: выигрывает начинающий.

Начинающий первым ходом ставит в угол число 24. Затем он разбивает все клетки на пары (рис. А32), а числа — на 11 «хороших» пар с суммой 23 ($1 + 22$, $2 + 21$, ..., $11 + 12$) и одну «плохую» пару 23, 25. В дальнейшей игре после того как второй игрок записывает число в какую-то клетку некоторой пары, первый ставит парное по отношению к нему число в оставшуюся клетку. «Плохая» пара одна, значит, ее нет либо в строке, либо в столбце, содержащем 24, а 24 в сумме с двумя хорошими парами дает 70.

9 класс

А41. Ответ: x_0 и $\tilde{x}$, где $\tilde{x} = \dfrac{x_1 + \ldots + x_n}{n}$.

По условию

$$x_0^2 + a_1x_0 + b_1 = \ldots = x_0^2 + a_nx_0 + b_n = 0.$$

Складывая эти равенства, получаем $nx_0^2 + (a_1 + \dots + a_n)x_0 + (b_1 + \dots b_n) = 0$, т. е. x_0 — корень рассматриваемого трехчлена $y = f(x)$. Поэтому дискриминант трехчлена неотрицателен и существует второй корень $\tilde{x}$. По теореме Виета

$$x_0 + x_1 = -a_1, \dots, x_0 + x_n = -a_n$$

и

$$x_0 + \tilde{x} = -\frac{1}{n}(a_1 + \dots + a_n).$$

Умножая последнее уравнение на n и вычитая из него первые n уравнений, имеем $n\tilde{x} - (x_1 + \dots + x_n) = 0$, откуда находим корень $\tilde{x}$.

А42. Ответ: на семь слагаемых.

Приведем пример разбиения числа 96 на семь слагаемых:

$$96 = 2 + 5 + 7 + 11 + 13 + 17 + 41.$$

Если слагаемых больше, то среди них не менее восьми нечетных (если их семь, то сумма нечетна). Заменим каждое из них на наименьший простой сомножитель. При этом сумма не увеличится, и все слагаемые будут различны. Но сумма восьми наименьших нечетных простых чисел равна 98.

А43. По условию медиана AM треугольника CAD является его высотой, поэтому $AC = AD$ и $\angle DAM = \angle CAM$ (рис. А33). Кроме того, $\angle EAM = \angle BAM$, поэтому $\angle CAE = \angle DAB$. Рассматривая аналогично другие вершины пятиугольника, получаем: $BE = BD$, $CA = CE$,

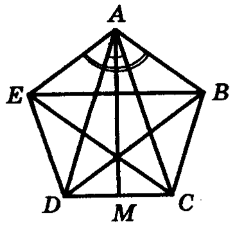

Рис. А33

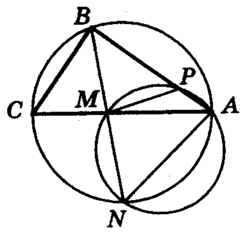

Рис. А34

$DB = DA$, $EC = EB$, откуда следует равенство длин всех диагоналей пятиугольника.

Таким образом, $\Delta ADB = \Delta ACE$ как равнобедренные треугольники с равными боковыми сторонами и равными углами при основании ($\angle CAE = \angle DAB$). Поэтому $AB = AE$. Аналогично получаем равенство всех остальных сторон пятиугольника, а из треугольников EAB, ABC, ..., DAE — равенство всех углов пятиугольника.

А44. Ответ: 97.

Пусть на карточках стопки написаны числа a_1, a_2, ..., a_{115} (сверху вниз). Составим стопку $116 - a_{115}$, $116 - a_{114}$, ..., $116 - a_1$. Разность между числами на соседних карточках этой стопки также равна m или n: $(116 - a_k) - (116 - a_{k-1}) = a_{k-1} - a_k$. Так как стопку можно сложить единственным способом, то вторая стопка получается из первой переворотом. Поэтому $a_{115} = 116 - a_1 = 116 - 19 = 97$.

А45. Ответ: можно. Достаточно, например, заменить два слагаемых 1200^2 и 1600^2 на их сумму 2000^2.

А46. Из условия следует равенство треугольников MBC и MBP (рис. А34), откуда $\angle MPA = 180° - \angle MCB = 180° - \angle MNA$, т. е. $\angle MPA + \angle MNA = 180°$. Значит, четырехугольник $MNAP$ — вписанный.

А47. Пусть попугай $П_1$ выдрал перо у $П_2$, тот — у $П_3$ и т. д. Такая цепочка, в которую войдут, возможно, не все попугаи, замкнется. Аналогично составим цепочку из части оставшихся попугаев и т. д. до конца. Из условия задачи следует, что каждая цепочка состоит либо из двух попугаев, либо не менее чем из четырех попугаев, иначе нашлись бы трое, вырвавшие перья друг у друга. Поэтому цепочка из нечетного числа попугаев содержит не менее пяти попугаев и таких цепочек не более $\frac{38}{5}$, т. е. не более 7. Число 38 — четное, поэтому количество цепочек с нечетным числом попугаев четно, т. е. их не больше 6. Теперь можно указать, как поступить удаву. Он должен рассаживать попугаев из цепочек поочередно в разные клетки: $П_1$, $П_3$, ... — в одну

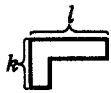

Рис. A35

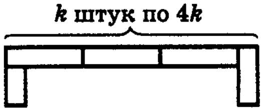

Рис. A36

клетку, $П_2$, $П_4$ — в другую, а по одному оставшемуся попугаю из каждой цепочки с нечетным числом попугаев — проглотить.

A48. Ответ: если $n = 1$, то один кусок; если $n > 1$, то $2n$ кусков.

При $n = 1$, очевидно, резать ничего не надо, т. е. получается один кусок. Если $n > 1$, то $n^2 + 1 > 2n$, поэтому каждый кусок должен быть уголком вида $1 \leqslant k \leqslant 2n$, $1 < l < 2n$ (рис. A35).

Докажем, что при $n > 1$ для покрытия квадрата $2n \times 2n$ необходимо не менее $2n$ таких кусков. Если каждый столбец квадрата $2n \times 2n$ пересекается не менее чем с двумя клетками какой-нибудь из фигурок, то, поскольку разные столбцы не могут так пересекать одну фигурку, фигурок не менее $2n$. Если же некоторый столбец пересекает каждую фигурку не более чем в одной клетке, то он пересекает $2n$ различных фигурок. (Мы использовали очевидный факт, что стороны фигурок параллельны соответствующим сторонам квадрата.)

Приведем алгоритм разбиения на $2n$ частей. Если $n = 2k$, то $n^2 + 1 = 4k^2 + 1$, и полоска разбивается на $4k$ прямоугольников размера $1 \times 4k$ (рис. A36). Если $n = 2k + 1$, то $n^2 + 1 = 4k^2 + 4k + 2$, и каемка разрезается на части так, как показано на рисунке A37, из которых затем складываем квадрат (рис. A38).

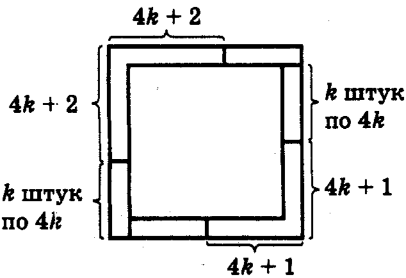

Рис. A37

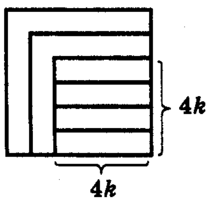

Рис. A38

10 класс

А49. Ответ: $f(x) = x^2$.

Полагая в данном уравнении $x = y$, имеем $f(0) = f(x) + f(x) - 2x^2$, т. е. $f(x) = x^2 + \frac{a}{2}$, где $a = f(0)$. Теперь, взяв $x = y = 0$, получаем $a = 2a$, т. е. $a = 0$. Осталось проверить, что функция $f(x) = x^2$ удовлетворяет данному уравнению.

А50. Ответ: $a = 1$, $b = 25$, $c = 125$.

По условию $5^x \cdot 10^n + 5^y = 5^z$, т. е. $5^{x+n} \cdot 2^n + 5^y = 5^z$, где $z > y$, $z > x + n$. Если $x + n < y$, то $2^n + 5^{y-x-n} = 5^{z-x-n}$, что невозможно, значит, $x + n \geqslant y$. Поэтому $5^{x+n-y} \cdot 2^n + 1 = 5^{z-y}$, откуда $x + n = y$ и $2^n + 1 = 5^t$, $t = z - y \in N$. Пусть $t = 2m$, тогда $(5^m - 1)(5^m + 1) = 2^n$, следовательно, два последовательных четных числа $5^m - 1$ и $5^m + 1$ — степени двойки. Отсюда $5^m - 1 = 2$, $5^m + 1 = 4$, т. е. m — не целое. Пусть $t = 2m + 1$, тогда $2^n = (4 + 1)^{2m+1} - 1 = 4 \cdot (5^{2m} + 5^{2m-1} + 5^{2m-2} + \ldots + 5 + 1) = 4(2k + 1)$. Это возможно только при $n = 2$, $m = 0$. Итак, $t = 1$, $y = 2$, т. е. $z = 3$, $x = 0$.

А51. Ответ: отрезок OT без его концов, где точка T лежит на луче OD и $\angle CTO = \angle ACD$.

Пусть S_1 — окружность, проходящая через точки A и B и пересекающая BD в точке K. Тогда согласно свойству вписанных углов $\angle MKB = \angle MAB = \angle ACD$, поэтому точки M, C, D, K лежат на одной окружности; если K лежит на отрезке OD, то $\angle MKD + \angle MCD = 180°$, если K лежит вне этого отрезка (точка K_1 на рис. А39). Таким образом, $K = N$, поскольку $K \in S_1$ и $K \in S_2$, т. е. окружности, проходящей через точки C, D и M. Итак, мы показали, что точка N должна лежать на отрезке OT. Покажем теперь, что любая точка этого отрезка, кроме O и T, входит в искомое геометрическое место точек. Действительно, пусть $N \in [OT]$. Тогда, выбрав точку $M \in [OC]$ так, чтобы $\angle MNB = \angle ACD$, получаем, что $N \in S_1$ и $N \in S_2$.

А52. См. решение задачи **А44**.

А53. Ответ: (α, α, α), $(-4\alpha, -\alpha, 2\alpha)$, где $(\alpha \ne 0)$.

По условию $2b = a + c$ и выполняется одно из равенств: $2\frac{1}{b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{c}$, $2\frac{1}{a} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$, или $2\ \frac{1}{c} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$. В первом случае, решив систему $2b = a + c$, $2ac = bc + ab$, получаем $a = b = c$. Во втором случае получаем $a = b = c$ или $a = 4b$, $c = -2b$. Третий случай аналогичен второму.

А54. Сечение куба является пятиугольником, если плоскость сечения пересекает пять граней куба из шести. При этом плоскость пересекает две пары параллельных граней (на рис. А40 изображено сечение $KLMNP$, у которого $KL \parallel MN$ и $LM \parallel NP$). Продолжив стороны KL и NP, получим точку $Q \in (AB)$, причем $QLMN$ — параллелограмм. Поэтому если S_0 — площадь сечения, а S_1 — площадь этого параллелограмма, то $S_0 < S_1 = LM \cdot MN \times$ $\times \sin \angle LMN \leqslant LM \cdot MN$. Итак, доказано, что площадь сечения меньше произведения некоторых двух его сторон, значит, она меньше и произведения двух самых длинных его сторон.

А55. Пусть вершины нового квадрата, расположенные по часовой стрелке, — это точки A, B, C, D. Рассмотрим два случая.

1. Пусть в узлы сетки попали две соседние вершины. Без ограничения общности можно считать, что это точки A и B. Тогда координаты вектора $\overrightarrow{AB}$ — целые числа

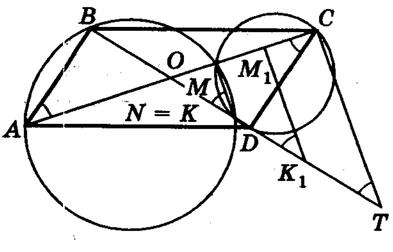

Рис. А39

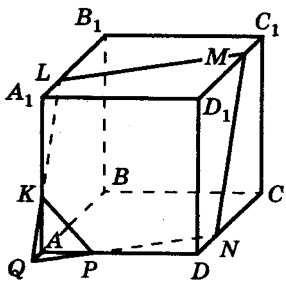

Рис. А40

$(m; n)$, следовательно, координатами вектора $\overrightarrow{BC}$ являются $(n; -m)$ — также целые числа, т. е. точка C совпадает с узлом сетки. Аналогичные рассуждения применимы и к точке D.

2. Пусть в узлы сетки попали две не соседние вершины: можно считать, что это A и C. Введем систему координат с центром в точке A и осями координат, параллельными линиям сетки. Пусть точка C имеет координаты $(m; n)$. Тогда точка D имеет координаты $\left(\frac{m-n}{2};\ \frac{m+n}{2}\right)$. Заметим, что числа $m + n$ и $n - m$ либо оба четные, либо оба нечетные (поскольку m и n целые).

Если $m + n$ и $n - m$ оба четные, то D совпадет с узлом сетки, и мы приходим к первому случаю. Если же $m + n$ и $n - m$ оба нечетные, то $(m + n)^2 + (n - m)^2$ при делении на 4 дает остаток 2, значит, квадрат длины стороны AD, равный $\frac{(m-n)^2}{4} + \frac{(m+n)^2}{4}$, не целое число, что невозможно.

Таким образом, во всех возможных случаях две другие вершины также находятся в узлах.

А56. Пронумеруем всех учеников в классе с помощью натуральных чисел от 1 до 20 и обозначим через $F(i, j, k)$ число общих друзей у i, j и k-го учеников, а сумму всех таких чисел F через S. Тогда, чтобы доказать утверждение задачи, достаточно показать, что для некоторых i, j и k выполняется неравенство $F(i, j, k) \geqslant 3$.

Всего чисел F будет $C_{20}^3 = \frac{20!}{3! \cdot 17!} = 1140$. Так как у каждого ученика не менее 10 друзей в классе, то при подсчете числа S каждого ученика мы учитываем не менее $C_{10}^3 = \frac{10!}{3! \cdot 7!} = 120$ раз, поэтому $S \geqslant 120 \cdot 20 = 2400$.

Таким образом, сумма 1140 целых чисел не меньше 2400, поэтому одно из чисел F не меньше 3, что и требовалось доказать.

11 класс

A57. Ответ: $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}$.

Из условия следует, что косинусы углов положительны, поэтому треугольник — остроугольный. Пусть a, b, c — длины сторон, A, B, C — противолежащие углы. Без ограничения общности можно считать, что $a \leqslant b \leqslant c$, тогда $A \leqslant B \leqslant C$ и $\cos A \geqslant \cos B \geqslant \cos C$, и из условия следует, что $a = \cos C$, $c = \cos A$, $a : c = \cos C : \cos A$. Далее, используя теорему синусов получаем, что $\sin A \cdot \cos A = \sin C \times \times \cos C$, $\sin 2A = \sin 2C$, откуда $2A = 2C$, или $2A + 2C = \pi$. Последнее невозможно, так как в этом случае $B = \frac{\pi}{2}$, $\cos B = 0$. Итак, $A = C$, т. е. треугольник ABC — равносторонний.

A58. Пусть P — точка пересечения высот A_1B_1, ..., $A_{2n}B_{2n}$ многоугольника (рис. A41).

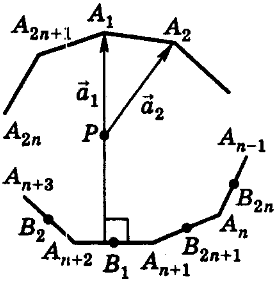

Рис. A41

Пусть $\overrightarrow{PA_1} = \vec{a}_1, ..., \overrightarrow{PA_{2n+1}} = \vec{a}_{2n+1}$.

Тогда $\overrightarrow{A_{n+1}A_{n+2}} = \vec{a}_{n+2} - \vec{a}_{n+1}$, и по условию $(\vec{a}_1, \vec{a}_{n+2} - \vec{a}_{n+1}) = 0$, $(\vec{a}_2, \vec{a}_{n+3} - \vec{a}_{n+2}) = 0$, ..., $(\vec{a}_{2n}, \vec{a}_n - \vec{a}_{n-1}) = 0$, т. е. $(\vec{a}_1, \vec{a}_{n+2}) = (\vec{a}_1, \vec{a}_{n+1})$, $(\vec{a}_2, \vec{a}_{n+3}) = (\vec{a}_2, \vec{a}_{n+2})$, ..., $(\vec{a}_{2n}, \vec{a}_n) = (\vec{a}_{2n}, \vec{a}_{n-1})$. Значит, $(\vec{a}_{2n+1}, \vec{a}_n) = (\vec{a}_n, \vec{a}_{2n}) = (\vec{a}_{2n}, \vec{a}_{n-1}) = (\vec{a}_{n-1}, \vec{a}_{2n-1}) = ... = (\vec{a}_1, \vec{a}_{n+1}) = (\vec{a}_{n+1}, \vec{a}_{2n+1})$, т. е. $(\vec{a}_{2n+1}, \vec{a}_n) = (\vec{a}_{2n+1}, \vec{a}_{n+1})$ или $(\vec{a}_{2n+1}, \vec{a}_{n+1} - \vec{a}_n) = 0$, откуда и следует, что $A_{2n+1} \perp A_nA_{n+1}$, т. е. и $(2n + 1)$-я высота проходит через точку P.

A59. Условие задачи можно записать так: если $n^n + 1 = m^k$, где $m, k \in N$, $n = 1996$, то $k = 1$.

Пусть $d = \text{НОД}(n, k)$. Тогда $k = da$, $n = db$, $a, b \in N$, следовательно,

$$1 = m^k - n^n = (m^a)^d - (n^b)^d,$$

что возможно только при $d = 1$. Значит, числа n и k взаимно просты. Из равенства $m^k - 1 = n^n$, т. е.

$$(m-1)(m^{k-1} + m^{k-2} + \ldots + 1) = 1996^n = 2^{2n} \cdot 499^n,$$

вытекает, что $m - 1 = 2^\alpha \cdot 499^\beta$, так как 2 и 499 — простые числа. Из условия следует, что m — нечетно, поэтому $\alpha \geqslant 1$. Таким образом, число $A = m^{k-1} + m^{k-2} + \ldots + 1$ нечетно, поскольку k и n взаимно просты. Значит, из равенства $2^{2n} \cdot 499^n = 2^\alpha \cdot 499^\beta \cdot A$ заключаем, что $\alpha = 2n$. Аналогично, если $\beta \geqslant 1$, то m дает при делении на 499 остаток 1, таким образом, в силу взаимной простоты k и n число A не делится на 499. Поэтому $\beta = n$. Но тогда $m = 2^{2n} \cdot 499^n + 1 = n^n$, значит, в этом случае $k = 1$.

Пусть теперь $\beta = 0$, т. е. $m = 2^{2n} + 1 = 2^{2 \cdot 1996} + 1$.

Покажем, что этот случай невозможен. Это можно сделать двумя способами.

1°. Имеем

$$m = (2^8)^{499} + 1 = 256^{499} + 1^{499} =$$
$$= (256 + 1)(256^{498} - 256^{497} + \ldots - 256 + 1),$$

т. е. m делится на 257. В то же время, используя стандартную технику теории вычетов, можно показать, что $n^n + 1$ не делится на 257.

2°. Имеем

$$1996^{1996} + 1 = (4^{1996} + 1)^k,$$

где k нечетно. Но при $k \geqslant 7$ это равенство невозможно, так как

$$m^k > (4^{1996})^k = (4^k)^{1996} \geqslant 4096^{1996},$$

при $n^n + 1$, а при $k \leqslant 5$ получаем

$$m^k \leqslant (4^{1996} + 1)^5 < 1996^{1996} + 1.$$

Итак, возможен только случай $k = 1$, что и требовалось доказать.

А60. Ответ: никто из игроков не сможет победить.

Обозначим через V выигрыш первого игрока. Сначала докажем, что первый может добиться того, чтобы V было неотрицательным. Для этого ему достаточно научиться получать симметричную таблицу (тогда V будет равно нулю). Он может придерживаться следующей стратегии: первым ходом записать число 1997 в центр таблицы, а затем записывать такое же число, что и второй игрок, в симметричную относительно главной диагонали клетку (если второй пошел не на главную диагональ) и в симметричную относительно центра клетку (если второй пошел на главную диагональ).

Теперь докажем, что второй может добиться того, чтобы V было неположительным. Для этого ему будет достаточно проследить, чтобы ни в одной строке таблицы, полученной в результате игры, сумма находящихся в ней чисел не была равна нулю, и при этом совершенно не заботиться о столбцах. Если первый игрок записывает в i-ю строку число a, то второй записывает в ту же строку число $-a$. Если же первый заканчивает заполнение числами строки, то второй выбирает любую строку и заполняет клетку в ней. При таком алгоритме во всех строках, кроме одной, будет нечетное число незаполненных клеток и сумма чисел в таких строках будет оставаться равной нулю. Последнее записанное в строку число сделает сумму ненулевой.

А61. Ответ: да, существует.

Искомым является, например, многочлен $P(x) = \sqrt{2}(x-1)(x-2)+x$, так как сумма иррационального числа $\sqrt{2}(n-1)(n-2)$ $(n \neq 1, 2)$ и целого числа n иррациональна.

А62. Отрезки A_1B_1, ..., D_1A_1 — средние линии треугольников ASB, ..., DSA, поэтому $A_1B_1 \parallel AB$, ..., $D_1A_1 \parallel DA$ и точки A_1, B_1, C_1 лежат в плоскости, параллельной (ABC) (рис. А42). Пусть P — точка пересечения отрезков AC_1, ..., DB_1. Точки A_1, B_1, C, D лежат в одной плоскости и $(A_1B_1C_1) \parallel (BCD)$, поэтому $A_1B_1 \parallel CD$. Отсюда следует, что $CD \parallel AB$. Аналогично, $AD \parallel BC$ и, значит, $ABCD$ — параллелограмм. Из подобия треугольников A_1PB_1 и CPD, ...,

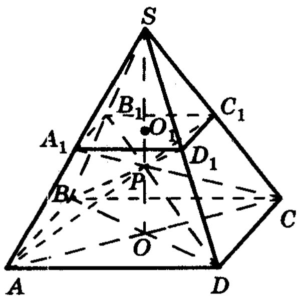

Рис. А42

D_1PA_1 и BPC вытекает, что $A_1P : PC = \ldots = D_1P : PB$. Но по условию $CA_1 = \ldots = BD_1$, поэтому $PA = PB = PC = PD$. Следовательно, если O — проекция точки P на (ABC), то $OA = OB = OC = OD$. Итак, около параллелограмма $ABCD$ можно описать окружность, значит, он — прямоугольник.

Замечания. 1. Гомотетии с центрами S и P и коэффициентами, равными, соответственно, $\frac{1}{2}$ и $-\frac{1}{2}$, переводят $ABCD$ в $A_1B_1C_1D_1$ и O в O_1 — центр прямоугольника $A_1B_1C_1D_1$, поэтому $O_1O \perp (ABC)$ и высота пирамиды проходит через точку O.

2. Пирамида $SABCD$ не обязательно должна быть правильной: для любой пирамиды, основанием которой является прямоугольник и высота проходит через его центр, указанные в условии отрезки равны и проходят через одну точку.

А63. Из того, что $0 \leqslant x, y, z \leqslant 1$, следует неравенство

$$\frac{x}{7 + y^3 + z^3} + \frac{y}{7 + z^3 + x^3} + \frac{z}{7 + x^3 + y^3} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{x}{6 + x^3 + y^3 + z^3} + \frac{y}{6 + x^3 + y^3 + z^3} +$$

$$+ \frac{z}{6 + x^3 + y^3 + z^3} = \frac{x + y + z}{6 + x^3 + y^3 + z^3}$$

и достаточно доказать, что $3(x + y + z) \leqslant 6 + x^3 + y^3 + z^3$. Последнее вытекает из неравенства $t^3 - 3t + 2 = (t - 1)^2 \times$ $\times (t + 2) \geqslant 0$, справедливого при $t \geqslant -2$ и, следовательно, при $0 \leqslant t \leqslant 1$.

А64. Утверждение задачи равносильно тому, что некоторая симметрия переводит бесконечно много узлов в такие же по цвету. Предположим противное: любая симметрия у всех, кроме конечного числа, точек, которые мы назовем исключительными, меняет цвет. Рассмотрим симметрии S_1 и S_2 с центрами O_1 и O_2 и две прямые l_1, l_2 такие, что $l_1 \parallel l_2 \parallel O_1O_2$, $S_1(l_1) = S_2(l_1) = l_2$ и все исключительные точки симметрий S_1 и S_2 лежат

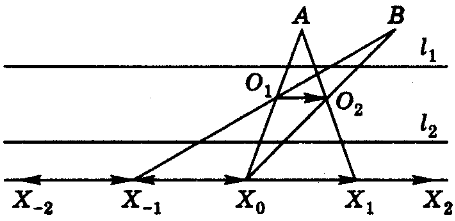

Рис. А43

между l_1 и l_2 (такие прямые найдутся в силу конечности числа исключительных точек симметрий S_1 и S_2) (рис. А43).

Тогда если узел X_0 вне полосы с границами l_1 и l_2 имеет цвет a, то узлы $S_1(X_0) = A$ и $S_2(X_0) = B$ имеют цвет b, значит, $S_1(B) = X_{-1}$ и $S_2(A) = X_1$ имеют цвет a. Значит, узлы X_0, X_1, X_{-1} такие, что $\overrightarrow{X_0X_1} = -\overrightarrow{X_0X_{-1}} = 2\overrightarrow{O_1O_2}$, имеют одинаковый цвет. Аналогично, такой же цвет будут иметь все узлы X_n, X_{-n}, где $\overrightarrow{X_{n-1}X_n} = -\overrightarrow{X_{-(n-1)}X_{-n}} = 2\overrightarrow{O_1O_2}$. Итак, одноцветным будет бесконечное множество узлов X_0, X_1, X_{-1}, X_2, X_{-2}, ..., имеющее центр симметрии X_0.

Часть Б

ЗОНАЛЬНЫЕ ОЛИМПИАДЫ

Условия задач

Олимпиада 1996 г.

8 класс

Б1. У Пети имеется $400^5 - 399^2 \cdot (400^3 + 2 \cdot 400^2 + 3 \times \times 400 + 4)$ р. Мороженое стоит 2000 р. Хватит ли у Пети денег на мороженое? (*К. Кноп*)

Б2. Назовем билет с номером от 000000 до 999999 «отличным», если в записи его номера имеются две соседние цифры, отличающиеся на 5. Сколько всего существует «отличных» билетов? (*А. Шаповалов*)

Б3. Существует ли выпуклый пятиугольник $ABCDE$, у которого все углы ABD, BCE, CDA, DEB, EAC — тупые? Пятиугольник называется выпуклым, если все его внутренние углы меньше $180°$. (*К. Кноп*)

Б4. На столе лежит n спичек ($n > 1$). Двое игроков по очереди снимают их со стола. Первый игрок своим первым ходом снимает со стола любое количество спичек от 1 до $n - 1$, а в дальнейшем каждый игрок каждым ходом может брать спичек не больше, чем взял его партнер предыдущим ходом (но не меньше одной спички). Выигрывает тот, кто взял последнюю спичку. Найдите все n, при которых первый игрок может при правильной игре обеспечить себе выигрыш независимо от игры второго. (*И. Рубанов*)

Б5. Можно ли так расположить фишки в клетках доски 8×8 (в каждой клетке — не более одной фишки), чтобы в любых двух вертикалях фишек было поровну, а в любых двух горизонталях — не поровну? (*А. Шаповалов*)

4 Зак. № 107

Б6. Точечный прожектор, находящийся в вершине B равностороннего треугольника ABC, освещает угол α. Найдите все такие значения α, не превосходящие 30°, что при любом положении прожектора, когда освещенный угол целиком находится внутри угла ABC, из освещенного и двух неосвещенных отрезков стороны AC можно составить треугольник. (*С. Дворянинов*)

Б7. Незнайка написал на доске несколько различных натуральных чисел и поделил (в уме) их сумму на их произведение. После этого он стер самое маленькое число и поделил (опять в уме) сумму оставшихся чисел на их произведение. Второй результат оказался втрое больше первого. Какое число стер Незнайка? (*К. Кохась*)

Б8. Имеется четыре монеты, три из которых — настоящие, весящие одинаково, а одна — фальшивая, отличающаяся от них по массе. Имеются также чашечные весы без гирь. Они таковы, что если положить на их чашки одинаковые по массе грузы, то любая из чашек может перевесить, а если грузы различны по массе, то всегда перевесит чашка с более тяжелым грузом. Как за три взвешивания на таких весах наверняка выявить фальшивую монету и определить, легче она или тяжелее настоящих? (*С. Токарев*)

9 класс

Б9. Найдите все такие пары квадратных трехчленов $x^2 + ax + b$ и $x^2 + cx + d$, что корни второго трехчлена — числа a и b (и только они), а корни первого трехчлена — числа c и d (и только они). (*И. Изместьев*)

Б10. На стороне AB равнобедренного треугольника ABC ($AB = BC$) выбрана произвольная точка D, и около треугольников ADC и BDC описаны окружности ω_1 и ω_2 соответственно. Касательная, проведенная к ω_1 в точке D, пересекает ω_2 второй раз в точке M. Докажите, что прямые BM и AC параллельны. (*М. Сонкин*)

Б11. Найдите все целые числа, которым может быть равна дробь $\dfrac{(a+b)\cdot(b+c)\cdot(c+a)}{abc}$ при условии, что a, b и c — натуральные числа, любые два из которых взаимно просты. (*Д. Храмцов*)

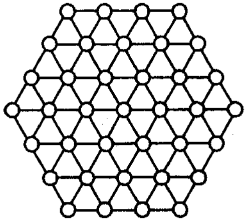

Рис. Б1

Б12. В одном из углов шестиугольной игровой доски со стороной n (на рис. Б1 изображена такая доска для $n = 3$) стоит фишка. Играют двое, ходят по очереди. Ход состоит в передвижении фишки по отрезку на соседнее поле, причем нельзя ставить фишку на поле, на котором она уже побывала. Проигрывает тот, кто не может сделать очередной ход без нарушения правил. Кто выиграет при правильной игре: тот, кто ходит первым, или его партнер? (*Ф. Дужин*)

Б13. У натурального числа n ровно шесть делителей. Их сумма равна 3500. Найдите все такие числа n. (*Р. Женодаров*)

Б14. Дан равнобедренный треугольник ABC ($AB = BC$), угол при вершине B которого равен β. Точечный прожектор, находящийся в вершине B, освещает угол α. При любом положении прожектора, когда освещенный угол целиком находится внутри угла ABC, из освещенного и двух неосвещенных отрезков стороны AC можно составить треугольник. Найдите величину α. (*С. Дворянинов*)

Б15. Докажите, что если $0 < a < 1$ и $0 < b < 1$, то $\frac{ab(1-a)\cdot(1-b)}{(1-ab)^2} < \frac{1}{4}$. (*Л. Медников*)

Б16. Имеется восемь монет, семь из которых — настоящие, весящие одинаково, а одна — фальшивая, отличающаяся от них по массе. Имеются также чашечные весы без гирь. Они таковы, что если положить на их чашки одинаковые по массе грузы, то любая их чашек может перевесить, а если грузы различны по массе, то всегда перевесит чашка с более тяжелым грузом. Как за четыре взвешивания на таких весах наверняка выявить фальшивую монету и определить, легче она или тяжелее настоящих? (*С. Токарев*)

10 класс

Б17. Докажите, что если a, b и c — положительные числа и $ab + bc + ca > a + b + c$, то $a + b + c > 3$. (*Р. Женодаров*)

Б18. Верно ли, что из произвольного треугольника можно вырезать три равных многоугольника, каждый из которых имеет площадь, большую четверти площади треугольника? (*С. Августинович*)

Б19. Дан угол. Построим точку M следующим образом. Возьмем произвольную равнобедренную трапецию, боковые стороны которой лежат на сторонах данного угла. Через две противоположные ее вершины проведем касательные к описанной около нее окружности. Через M обозначим точку пересечения этих касательных. Какую фигуру образуют все такие точки M? (*М. Сонкин*)

Б20. В каждой клетке квадратной таблицы размером $n \times n$ ($n \geqslant 3$) записано число 1 или -1. Если взять любые два столбца, перемножить пары чисел, стоящих в них в одной строке, и сложить n получившихся произведений, то сумма будет равна нулю. Докажите, что число n делится на 4. (*В. Дольников*)

Б21. См. условие задачи **Б13.**

Б22. Дан треугольник $A_0B_0C_0$. На отрезке A_0B_0 отмечены точки $A_1, A_2, \ldots, A_n$, а на отрезке B_0C_0 — точки $C_1, C_2, \ldots, C_n$ так, что все отрезки A_iC_{i+1} ($i = 0, 1, \ldots, n-1$) параллельны между собой и все отрезки C_iA_{i+1} ($i = 0, 1, \ldots, n-1$) также параллельны. Части отрезков C_0A_1, A_1C_2, A_2C_1 и C_1A_0 ограничивают некоторый параллелограмм, части отрезков C_1A_2, A_2C_3, A_3C_2 и C_2A_1 — другой параллелограмм и т. д. Докажите, что сумма площадей всех $n-1$ получившихся параллелограммов меньше половины площади треугольника $A_0B_0C_0$. (*М. Сонкин*)

Б23. См. условие задачи **Б16.**

Б24. На прямой через равные промежутки отмечены 1996 точек. Петя раскрашивает половину из них в красный цвет, а остальные — в синий. Затем Вася разбивает их на пары «красная»—«синяя» так, чтобы сумма расстояний между точками в парах была максимальной. Докажите, что этот максимум не зависит от того, какую раскраску сделал Петя. (*И. Изместьев*)

11 класс

Б25. См. условие задачи **Б17.**

Б26. Назовем медианой системы $2n$ точек плоскости прямую, проходящую ровно через две из них, по обе стороны от которой точек этой системы поровну. Какое наименьшее количество медиан может быть у системы из $2n$ точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой? (*А. Шаповалов*)

Б27. Длина наибольшей стороны треугольника равна 1. Докажите, что три круга с центрами в вершинах и радиусами $\frac{1}{\sqrt{3}}$ покрывают весь треугольник. (*В. Дольников*)

Б28. Многочлен степени n имеет n различных вещественных корней. Какое наибольшее число его коэффициентов может быть равно нулю? (*И. Рубанов*)

Б29. Дана функция $f(x) = |4 - 4|x|| - 2$. Сколько решений имеет уравнение $f(f(x)) = x$? (*Н. Нецветаев*)

Б30. Найдите все такие натуральные n, что при некоторых попарно различных натуральных a, b, c и d среди чисел

$$\frac{(a-c)(b-d)}{(a-b)(c-d)},\ \frac{(a-c)(b-d)}{(b-c)(a-d)},$$

$$\frac{(b-c)(a-d)}{(a-c)(b-d)},\ \frac{(a-b)(d-c)}{(a-d)(b-c)}$$

имеется по крайней мере два равных числу n. (*С. Дужин*)

Б31. В треугольнике ABC взята точка O такая, что $\angle COA = \angle B + 60°$, $\angle COB = \angle A + 60°$, $\angle AOB = \angle C + 60°$.

Докажите, что если из отрезков AO, BO, CO можно составить треугольник, то из высот треугольника ABC также можно составить треугольник и эти треугольники подобны. (*К. Кноп*)

Б32. Существует ли бесконечная в обе стороны периодическая последовательность, состоящая из букв a и b, такая, что при одновременной замене всех букв a на aba и b на bba она переходит в себя (возможно со сдвигом)? Последовательность называется *периодической*, если существует такое натуральное n, что для всякого целого числа i член последовательности с номером i равен члену с номером $i + n$. (*А. Белов*)

Олимпиада 1997 г.

8 класс

Б33. Докажите, что числа от 1 до 16 можно записать в строку, но нельзя записать по кругу так, чтобы сумма любых двух соседних чисел была квадратом натурального числа. (*Н. Агаханов*)

Б34. Имеются 300 яблок, любые два из которых различаются по весу не более чем в 2 раза. Докажите, что их можно разложить в пакеты по два яблока так, чтобы любые два пакета различались по весу не более чем в 1,5 раза. (*А. Шаповалов*)

Б35. На сторонах AB и BC равностороннего треугольника ABC взяты точки D и K, а на стороне AC — точки E и M так, что $DA + AE = KC + CM = AB$. Докажите, что угол между прямыми DM и KE равен 60°. (*В. Произволов*)

Б36. На предприятии трудится 50 000 человек. Для каждого из них сумма количества его непосредственных начальников и его непосредственных подчиненных равна 7. В понедельник каждый работник предприятия издает приказ и выдает копию этого приказа каждому своему непосредственному подчиненному (если такие есть). Далее, каждый день работник берет все полученные им в предыдущие дни приказы и либо раздает их копии всем своим непосредственным подчиненным, либо, если таковых нет, выполняет приказы сам. Оказалось, что в пятницу никакие бумаги по учреждению не передаются. Докажите, что на предприятии не менее 97 начальников, над которыми нет начальников. (*Е. Малинникова*)

Б37. Отрезки AB, BC и CA — соответственно диагонали квадратов K_1, K_2, K_3. Докажите, что если треугольник ABC — остроугольный, то он полностью покрывается квадратами K_1, K_2 и K_3. (*Н. Агаханов*)

Б38. Числа от 1 до 37 записали в строку так, что сумма любых первых нескольких чисел делится на следующее за ними число. Какое число стоит на третьем месте, если на первом месте написано число 37, а на втором — 1? (*А. Шаповалов*)

Б39. Найдите все такие пары простых чисел p и q, что $p^3 - q^5 = (p + q)^2$. (*С. Токарев*)

Б40. В городе Мехико, чтобы ограничить транспортный поток, для каждой частной автомашины устанавливаются два дня недели, в которые она не может выезжать на улицы города. Семье требуется каждый день иметь в распоряжении не менее 10 машин. Каким наименьшим количеством машин может обойтись семья, если ее члены могут сами выбирать запрещенные дни для своих автомобилей? (*И. Ященко*)

9 класс

Б41. Правильный 1997-угольник разбит непересекающимися диагоналями на треугольники. Докажите, что среди них ровно один — остроугольный. (*А. Шаповалов*)

Б42. На доске записаны числа 1, 2, 3, ..., 1000. Двое по очереди стирают по одному числу. Игра заканчивается, когда на доске остается два числа. Если их сумма делится на 3, побеждает тот, кто делал первый ход, если нет — его партнер. Кто из них выиграет при правильной игре? (*А. Шаповалов*)

Б43. Имеются 300 яблок, любые два из которых различаются по весу не более чем в 3 раза. Докажите, что их можно разложить в пакеты по четыре яблока так, чтобы любые два пакета различались по весу не более чем в 1,5 раза. (*А. Шаповалов*)

Б44. Назовем «сочетанием цифр» несколько цифр, записанных подряд. В стране Роботландии некоторые сочетания цифр объявлены запрещенными. Известно, что запрещенных сочетаний конечное число и существует бесконечная десятичная дробь, не содержащая запрещенных сочетаний.

Докажите, что существует бесконечная периодическая десятичная дробь, не содержащая запрещенных сочетаний. (*А. Белов*)

Б45. Дан набор, состоящий из 1997 чисел таких, что если каждое число в наборе заменить на сумму остальных, то получится тот же набор. Докажите, что произведение чисел в наборе равно нулю. (*А. Фомин*)

Б46. См. условие задачи **Б38.**

Б47. Дан треугольник ABC. Точка B_1 делит пополам длину ломаной ABC (составленной из отрезков AB и BC), точка C_1 делит пополам длину ломаной ACB, точка A_1 делит пополам длину ломаной CAB. Через точки A_1, B_1 и C_1 проводятся прямые l_A, l_B, l_C, параллельные биссектрисам углов BAC, ABC и ACB соответственно. Докажите, что прямые l_A, l_B и l_C пересекаются в одной точке. (*М. Сонкин*)

Б48. См. условие задачи **Б40.**

10 класс

Б49. Микрокалькулятор «МК-97» умеет производить над числами, занесенными в память, только три операции:

а) проверять, равны ли выбранные два числа;

б) складывать выбранные числа;

в) по выбранным числам a и b находить корни уравнения $x^2 + ax + b = 0$, а если корней нет, выдавать сообщение об этом.

Результаты всех действий заносятся в память. Первоначально в памяти записано одно число x. Как с помощью «МК-97» узнать, равно ли это число единице? (*И. Рубанов*)

Б50. Окружности S_1 и S_2 пересекаются в точках M и N. Докажите, что если вершины A и C некоторого прямоугольника $ABCD$, лежат на окружности S_1, а вершины B и D — на окружности S_2, то точка пересечения его диагоналей лежит на прямой MN. (*Л. Смирнова*)

Б51. Пусть m, n — натуральные числа. Докажите, что число $2^n - 1$ делится на число $(2^m - 1)^2$ тогда и только тогда, когда число n делится на число $m(2^m - 1)$. (*О. Тен*)

Б52. Дан куб с ребром 4. Можно ли целиком оклеить три его грани, имеющие общую вершину, 16 бумажными прямоугольными полосками размером 1×3? (*Л. Емельянов*)

Б53. Дан набор, состоящий из 100 различных чисел таких, что если каждое число в наборе заменить на сумму остальных, то получится тот же набор. Докажите, что произведение чисел в наборе положительно. (*А. Фомин*)

Б54. В городе Мехико, чтобы ограничить транспортный поток, для каждой частной автомашины устанавливается один день в неделю, в который она не может выезжать на улицы города. Состоятельная семья из 10 человек подкупила полицию, и для каждой машины они называют два дня, один из которых полиция выбирает в качестве «невыездного» дня. Какое наименьшее количество машин нужно купить семье, чтобы каждый день каждый член семьи мог самостоятельно ездить, если утверждение «невыездных» дней для автомобилей идет последовательно? (*И. Ященко*)

Б55. Точки O_1 и O_2 — центры описанной и вписанной окружностей равнобедренного треугольника ABC ($AB = BC$). Окружности, описанные около треугольников ABC и O_1O_2A, пересекаются в точках A и D. Докажите, что прямая BD касается окружности, описанной около треугольника O_1O_2A. (*М. Сонкин*)

Б56. Докажите, что если

$$\sqrt{x+a}+\sqrt{y+b}+\sqrt{z+c}=\sqrt{y+a}+\sqrt{z+b}+$$
$$+\sqrt{x+c}=\sqrt{z+a}+\sqrt{x+b}+\sqrt{y+c}$$

для некоторых a, b, c, x, y, z, то $x = y = z$ или $a = b = c$. (*М. Сонкин*)

11 класс

Б57. См. условие задачи **Б49.**

Б58. Все вершины треугольника ABC лежат внутри квадрата K. Докажите, что если все их отразить симметрично относительно точки пересечения медиан треугольника ABC, то хотя бы одна из полученных трех точек окажется внутри K. (*В. Дольников*)

Б59. Обозначим через $S(N)$ сумму цифр натурального числа N. Докажите, что существует бесконечно много натуральных n таких, что $S(3^n) \geqslant S(3^{n+1})$. (*А. Белов*)

Б60. См. условие задачи **Б52.**

Б61. Члены Государственной Думы образовали комиссии так, что для любых двух комиссий A и B (не обязательно различных) $\overline{A \cup B}$ — также комиссия (через $\bar{C}$ обозначается множество всех членов Думы, не входящих в C).

Докажите, что если A и B — любые две комиссии, то $A \cup B$ — также комиссия. (*А. Скопенков*)

Б62. Докажите, что если $1 < a < b < c$, то

$\log_a \log_a b + \log_b \log_b c + \log_c \log_c a > 0$. (*С. Токарев*)

Б63. Существуют ли выпуклая n-угольная ($n \geqslant 4$) и треугольная пирамиды такие, что четыре трехгранных угла n-угольной пирамиды равны трехгранным углам треугольной пирамиды? (*Н. Агаханов, Р. Карасев*)

Б64. Для каких α существует функция $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, отличная от константы, такая, что $f(\alpha(x + y)) = f(x) + f(y)$? (*Л. Емельянов*)

Решения задач

Олимпиада 1996 г.

8 класс

Б1. Ответ: не хватит.

Пусть $n = 400$. Тогда

$$400^5 - 399^2(400^3 + 2 \cdot 400^2 + 3 \cdot 400 + 4) =$$
$$= n^5 - (n-1)^2(n^3 + 2n^2 + 3n + 4) =$$
$$= n^5 - (n-1)(n^4 + n^3 + n^2 + n - 4) = n^5 - (n^5 - 5n + 4) =$$
$$= 5n - 4 = 5 \cdot 400 - 4 = 1996 < 2000.$$

Б2. Ответ: $10^6 - 10 \cdot 9^5$.

Выясним, сколько найдется билетов, которые не являются «отличными». Первая цифра такого билета может быть выбрана 10 способами, а каждая следующая — 9 способами (нельзя брать цифру, отличающуюся от предыдущей на 5, а такая цифра для любой предыдущей ровно одна). Поэтому всего существует $10 \cdot 9^5$ билетов, не являющихся «отличными». Всего билетов 10^6, поэтому «отличных» билетов $10^6 - 10 \cdot 9^5$.

Б3. Ответ: не существует.

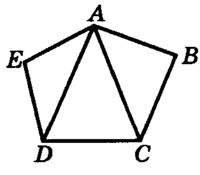

Рис. Б2

Рассмотрим наименьшую диагональ пятиугольника. Допустим, что это диагональ AC (рис. Б2). Так как $AC \leqslant AD$, то $\angle\ CDA \leqslant \angle\ DCA$ (в треугольнике ACD против большей стороны лежит больший угол). Но тогда в треугольнике ACD два тупых угла, что невозможно. Случаи, когда наименьшей является диагональ BD, CE, DA или EB, рассматриваются аналогично.

Б4. Ответ: n не равно степени двойки.

Если n нечетно, то первый игрок выигрывает, взяв первым ходом одну спичку: в дальнейшем оба обязаны брать по одной спичке, и последний ход — за первым игроком. Если же n четно, то игрок, который взял очередным ходом нечетное число спичек, проигрывает, поскольку оставил партнеру нечетное число спичек при его ходе. Поэтому, чтобы сохранить шансы на выигрыш, в этом случае игроки должны каждым ходом брать четное число спичек. Но это значит, что можно мысленно соединить спички в пары и считать, что игроки каждым ходом берут некоторое количество пар. При этом возможны такие варианты:

1) Получилась одна пара, т. е. $n = 2$. Тогда первый игрок проигрывает, так как взять две спички сразу он не может.

2) Получилось нечетное число пар, большее 1, т. е. $n = 4m + 2$. Тогда первый выигрывает, взяв первым ходом одну пару.

3) Получилось четное число пар, т. е. $n = 4m$. Здесь, чтобы сохранить шансы на выигрыш, игроки должны каждым ходом брать четное число пар. Но тогда можно объединить пары в четверки и считать, что каждым ходом берется некоторое количество четверок. Проводя теперь для четверок те же рассуждения 1)—3), что и для пар, получаем, что при $n = 4$ первый игрок проигрывает, при $n = 8m + 4$ — выигрывает, а при $n = 8m$ надо переходить к восьмеркам. Повторяя эти рассуждения, получаем, что при $n = 2, 4, 8, 16, \ldots$ первый проигрывает, а при остальных n — выигрывает.

Б5. Ответ: можно.

Достаточно привести пример (рис. Б3).

Б6. Ответ: $\alpha = 30°$.

Покажем сначала, что угол в 30° удовлетворяет условиям задачи. Пусть прожектор с углом $\alpha = 30°$ освещает отрезок MN на стороне AC (M лежит между N и A, рис. Б4).

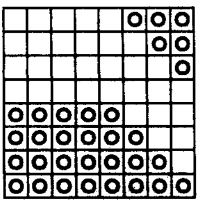

Рис. Б3

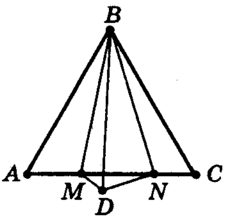

Рис. Б4

Прямые BN и AC не перпендикулярны: иначе точка M совпадает с A. Поэтому, отразив точку C относительно прямой BN, получим точку D, не лежащую на прямой AC. Поскольку точки N и B лежат на оси симметрии, имеем $NC = DN$ и $DB = BC$. Но по условию $BC = AB$. Значит, треугольник ABD — равнобедренный. Так как $\angle DBN = \angle CBN$ и $\angle DBM + \angle DBN = \angle MBN = 30° = \angle MBA + \angle CBN$, то углы MBA и DBM равны, откуда $AM = MD$. Следовательно, отрезки AM, MN и NC равны сторонам треугольника DNM, что требовалось доказать.

Теперь покажем, что любой угол $\alpha < 30°$ не удовлетворяет условию. Для этого отложим угол α от медианы BK так, чтобы он прошел внутри угла KBC. Вторая его сторона пересечет отрезок KC в некоторой точке M. Но тогда сумма отрезков KM и MC будет равна отрезку AK и из этих отрезков построить треугольник не удастся.

Б7. Ответ: 4.

Пусть a — стертое число, S — сумма оставшихся, P — произведение оставшихся. Тогда

$$\frac{3(a+S)}{aP} = \frac{S}{P} \Leftrightarrow \frac{1}{3} = \frac{1}{a} + \frac{1}{S}.$$

Так как $a < S$, то $\frac{1}{a} > \frac{1}{6}$, то $a = 4$ или $a = 5$. Случай $a = 5$ невозможен, поскольку тогда $S = 7{,}5$. Случай $a = 4$ возможен: $S = 12$, и написанными Незнайкой числами были 4, 5 и 7.

Б8. Несмотря на скверное качество весов, у них есть одно хорошее свойство: если монеты разложены по чашкам весов поровну, то та чашка, где лежит фальшивая монета, либо перевешивает (когда фальшивая монета тяжелее настоящих), либо нет (когда она легче). Поэтому если некоторая монета при двух взвешиваниях, когда монеты были разложены поровну, однажды оказалась внизу, а однажды — вверху, то она настоящая. Положим на чашки по две монеты. Монеты перевесившей чашки обозначим *1* и *2*, а другой — *3* и *4*. Вторым взвешиванием сравним *1* и *3* с *2* и *4*. Если перевесит чашка с *1* и *3*, то монеты *3* и *2* заведомо настоящие, если же перевесит другая, то заведомо настоящими являются монеты *1* и *4*. Последним взвешиванием сравним заведомо настоящие с двумя другими. Пусть настоящими являются монеты *2* и *3*. Тогда если чашка с ними перевесит, то фальшивая легче и, значит, это монета *4*; если же наоборот, то фальшивая тяжелее и это монета *1*. Случай, когда настоящими после второго взвешивания оказываются монеты *1* и *4*, разбирается аналогично.

9 класс

Б9. Ответ: возможные пары таковы: $x^2 + ax$ и $x^2 - ax$ (a — любое), а также $x^2 + x - 2$ и $x^2 + x - 2$.

По теореме Виета

$$a = -(c + d), \tag{1}$$

$$b = cd, \tag{2}$$

$$c = -(a + b), \tag{3}$$

$$d = ab. \tag{4}$$

Перепишем равенства (1) и (3) в виде $a + c + d = 0$ и $a + b + c = 0$. Отсюда сразу видно, что $b = d$. Рассмотрим два случая:

1) $b = d = 0$. Здесь равенства (1) и (3) превращаются в равенство $a = -c$, а равенства (2) и (4) выполняются автоматически. Это дает серию решений $x^2 + ax$ и $x^2 - ax$, где при любом a каждое из уравнений имеет два корня.

2) $b = d \neq 0$. В этом случае перепишем равенства (2) и (4) так: $b = bc$ и $b = ab$; разделим оба равенства на b. Получим $a = c = 1$, а затем из (1) и (3) найдем, что $b = d = -2$. Это дает последний из указанных выше ответов.

Б10. Заметим, что углы DAC и CDM (рис. Б5) равны, так как оба измеряются половиной дуги DC окружности ω_1 (первый вписан в окружность ω_1 и опирается на дугу DC, а второй — это угол между касательной к окружности ω_1 и хордой DC). Далее, углы CBM и CDM также равны, поскольку оба вписаны в окружность ω_2 и опираются на одну и ту же ее дугу. Но по условию $\angle DAC = \angle BCA$, откуда $\angle BCA = \angle CBM$ и $BM \parallel AC$, что и требовалось доказать.

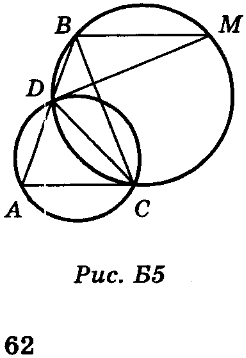

Рис. Б5

Б11. Ответ: 8, 9, 10.

Пусть $\dfrac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc} = n$ — целое число, тогда

$$(a+b)(b+c)(c+a) = nabc. \qquad (1)$$

Если среди чисел a, b и c есть равные, то ввиду симметричности равенства (1) можно считать, что $a = b$. Тогда $(a, b) = a = 1$ и равенство (1) принимает вид $2(1+c)(1+c) = nc$. Отсюда следует, что 2 делится на c, т. е. $c = 1$ или $c = 2$. В первом случае $n = 8$, а во втором $n = 9$.

Если числа a, b и c попарно различны, то можно считать, что $a < b < c$. Поскольку любые оба из них взаимно просты, сумма этих чисел взаимно проста с каждым из них, поэтому из (1) следует, что

$$a + b = nc \qquad (2)$$

и

$$a + c = kb, \qquad (3)$$

где n и k — натуральные числа. Но $a + b < 2c$, поэтому $nc < 2c$, т. е. $n < 2$. Отсюда $n = 1$ и, следовательно,

$$a + b = c. \qquad (4)$$

Выразив из (3) число c и подставив результат в (4), получим $a + b = kb - a$, откуда $2a = b(k-1)$. Так как числа a и b взаимно просты, то число 2 делится на b. Учитывая, что $1 \leqslant a < b$, получаем, что $b > 1$, т. е. $b = 2$. Тогда $a = 1$ и $c = 3$. Легко убедиться, что эти значения удовлетворяют условиям задачи и дают значение $n = 10$.

Б12. Ответ: выигрывает второй.

Разобьем все узлы решетки, кроме того, который фишка занимала в начале игры, по спирали на пары соседних (на рис. Б6 показано, как это сделать для $n = 4$). Тогда после каждого хода первого игрока второй может передвинуть фишку в узел, находящийся в паре с только что занятым. Поскольку число пар конечно, рано или поздно первый игрок окажется в ситуации, когда он не сможет сделать ход.

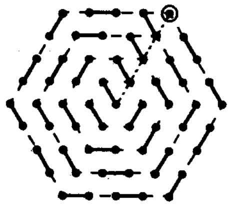

Рис. Б6

Б13. Ответ: 1996.

Так как число n имеет шесть делителей, то $n = p^5$, где p — простое число или $n = p^2q$, где p и q — различные простые числа. В первом случае из условия задачи получаем уравнение

$$1+p+p^2+p^4+p^5=3500,$$

или

$$p(1+p+p^2+p^3+p^4)=3499.$$

Число 3499 не делится на 2, 3, 5 и 7, поэтому p должно быть не меньше 11, но тогда левая часть последнего уравнения больше, чем 3499. Значит, это уравнение решений в простых числах не имеет.

Во втором случае получаем уравнение

$$1+p+p^2+q+qp+qp^2=3500.$$

Раскладывая обе его части на множители, имеем

$$(1+p+p^2)(1+q)=5^3\cdot 7\cdot 4.$$

Первый множитель левой части этого уравнения нечетен (число $p+p^2=p(p+1)$ четно при любом целом p) и не делится на 5 (это можно проверить, подставляя в него $p=5k$; $5k+1$; $5k+2$; $5k+3$; $5k+4$, где k — целое). Отсюда, учитывая, что $1+p+p^2>1$, имеем $1+p+p^2=7$, и, следовательно, $p=2$, $q=499$. Числа 2 и 499 — простые. Искомое число равно $2^2\cdot 499=1996$.

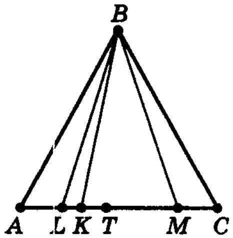

Рис. Б7

Б14. Ответ: $\alpha=\frac{\beta}{2}$.

Случаи $\alpha=\frac{\beta}{2}$ и $\alpha<\frac{\beta}{2}$ разбираются аналогично случаям $\alpha=30°$ и $\alpha<30°$ в решении задачи **Б6.** При решении данной задачи нужно дополнительно показать, что в случае $\alpha>\frac{\beta}{2}$ треугольник также может не получиться. Пусть T — середина отрезка AC, а точка K такова, что $\angle KBC=\alpha$ (рис. Б7). Возьмем на отрезке TC точку M так, чтобы отрезок CM был короче TK, а угол MBC меньше угла ABK. Проведем внутри угла ABK луч BL (L лежит на отрезке AK) так, чтобы $\angle KBL=\angle MBC=\alpha$. Пусть прожектор освещает угол MBL. Тогда освещенный им отрезок LM больше отрезка KM, равного $KC-MC=KC-KT=$ $=\frac{1}{2}AC$. Итак, $LM>\frac{1}{2}AC$, кроме того, $AL+MC=AC-$

$-LM < \frac{1}{2}AC$. Значит, $LM > AL + MC$ и из отрезков AL, LM и MC построить треугольник нельзя.

Б15. Положим $u = (ab)^{1/2}$, $w = a + b$. Учитывая, что $w \geqslant 2u$, получаем

$$\frac{ab(1-a)(1-b)}{(1-ab)^2} = \frac{u^2(1+u^2-2w)}{(1-u^2)^2} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{u^2(1+u^2-2u)}{(1-u^2)^2} = \frac{u^2(1-u)^2}{(1-u^2)^2} = \left(\frac{u}{1+u}\right)^2.$$

Теперь достаточно доказать, что $\left(\frac{u}{1+u}\right)^2 < \frac{1}{4}$. Это неравенство равносильно неравенству $\frac{u}{1+u} < \frac{1}{2}$, или $\frac{1+u}{u} > 2$. Но последнее неравенство очевидно, так как его левая часть равна $1 + \frac{1}{u}$, а $u < 1$.

Б16. Сведем задачу про 8 монет к задаче **Б8** (про 4 монеты). Для этого составим «большие» монеты, сложив их стопками по две монеты в каждой. За три взвешивания мы обнаружим кучку из двух монет, в которой находится фальшивая, и узнаем, легче она или тяжелее. Положив монеты из этой кучки на чашки весов, мы найдем четвертым взвешиванием фальшивую монету.

10 класс

Б17. Имеем

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab+bc+ca) \geqslant$$
$$\geqslant ab + bc + ca + 2(ab+bc+ca) =$$
$$= 3(ab+bc+ca) > 3(a+b+c).$$

Так как $a + b + c > 0$, то $a + b + c > 3$. В решении использовано неравенство $a^2 + b^2 + c^2 \geqslant ab + bc + ca$, равносильное неравенству $(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \geqslant 0$.

Б18. Ответ: да.

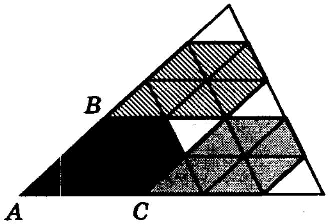

Рис. Б8

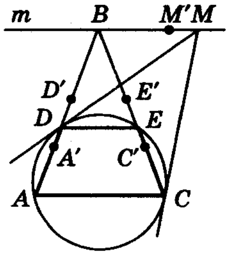

Рис. Б9

Разобьем треугольник прямыми, параллельными его сторонам, на 25 одинаковых треугольников и вырежем из него три фигуры так, как показано на рисунке Б8. Площади этих фигур равны, так как левая нижняя фигура совмещается с двумя другими параллельными переносами на векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$. При этом площадь каждой фигуры равна 7/25 площади треугольников.

Б19. Ответ: прямую, перпендикулярную биссектрисе угла и проходящую через его вершину, исключая саму вершину.

Пусть B — вершина данного угла, $ADEC$ — равнобедренная трапеция (рис. Б9); DM и CM — касательные к окружности, описанной около $ADEC$ (т. е. M — некоторая точка искомой фигуры). Очевидно, что ΔABC — равнобедренный и AC перпендикулярна биссектрисе угла B. Угол BDM равен половине дуги AD; угол BCM равен половине дуги CE. Так как дуги AD и CE равны, то угол BDM равен углу BCM. Следовательно, точки B, M, C и D лежат на одной окружности, $BM \parallel AC$ (см. решение задачи **Б10**), т. е. M лежит на перпендикуляре m к биссектрисе угла B.

Осталось показать, что любая точка M' прямой m, отличная от B, принадлежит искомой фигуре. Проведя касательные в точках A и E, мы получим точку, симметричную M' относительно B. Поэтому достаточно доказать, что искомой фигуре принадлежат все точки луча BM. Рассмотрим гомотетию с центром в точке B, переводящую точку M в M'. Пусть при этой гомотетии точки A, D, E и C переходят в точки A', D', E' и C'. Легко понять, что точка M' будет точкой пересечения касательных, проходящих через точки C' и D', к окружности, описанной около трапеции $A'D'E'C'$.

Б20. Рассмотрим только три первых столбца. В них возможны восемь различных расстановок чисел 1 и −1. Пусть имеется a строк вида (1, 1, 1) или (−1, −1, −1); b строк вида (−1, 1, 1) или (1 , −1, −1); c строк вида (1, −1, 1) или (−1, 1, −1); d строк вида (1, 1, −1) или (−1, −1, 1). Если взять первый и второй столбцы и попарно перемножить числа, стоящие в них в одной строке, то получим $a + d$ чисел, равных 1, и $b + c$ чисел, равных −1, откуда

$$a - b - c + d = 0. \qquad (1)$$

Проведя аналогичное рассуждение для первого и третьего столбцов, получим

$$a - b + c - d = 0, \qquad (2)$$

а для второго и третьего

$$a + b - c - d = 0. \qquad (3)$$

Сложив уравнения (1) и (2), находим $a = b$. Затем, сложив (2) и (3), получим, что $a = d$, и, наконец, сложив (1) и (3), — что $a = c$. Итак, $n = a + b + c + d = 4a$, и, следовательно, n делится на 4.

Б21. См. решение задачи **Б13.**

Б22. Обозначим точки пересечения отрезков A_iC_{i+1} и C_iA_{i+1} через D_i ($i = 0, 1, \ldots, n - 1$) (рис. Б10). Проведем через точку D_1 прямые $D_1F \parallel A_0B_0$ и $D_1G \parallel B_0C_0$. Тогда $A_0A_1D_1F$ — параллелограмм, равновеликий параллелограмму $D_0A_1D_1C_1$, так как он имеет общее с ним основание A_1D_1 и равную высоту. Аналогично, равновелики параллелограммы $A_0GD_1C_1$ и $D_0A_1D_1C_1$. Таким образом,

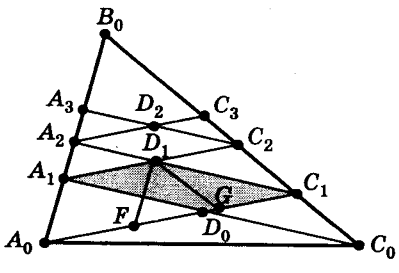

Рис. Б10

$$S_{D_0A_1D_1C_1} = \frac{1}{2}(S_{A_0A_1D_1F} + S_{A_0GD_1C_1}) <$$
$$< \frac{1}{2} S_{A_0A_1D_1C_1C_0D_0}$$

(параллелограммы $A_0A_1D_1F$ и $A_0GD_1C_1$ не имеют общих внутренних точек). Аналогично, $S_{D_1A_2D_2C_2} < S_{A_1A_2D_2C_2C_1D_1}$ и т. д. Поэтому сумма площадей всех $n - 1$ параллелограммов меньше $\frac{1}{2} S_{A_0B_0C_0} - S_{A_0D_0C_0}$ и тем более меньше, чем $S_{A_0B_0C_0}$.

Б23. См. решение задачи **Б16.**

Б24. Докажем, что максимум достигается при следующем разбиении: в первой паре — первая слева красная точка и первая справа синяя, во второй паре — вторая слева красная и вторая справа синяя и т. д. Для этого соединим точки в каждой паре отрезком и подсчитаем, сколько из этих отрезков покрывают отрезок A_kA_{k+1}. Пусть $k \leqslant 998$ и среди точек $A_1, A_2, \ldots, A_k$ имеется m красных. Тогда справа от точки A_k не менее m синих (в противном случае среди $A_1, A_2, \ldots, A_k$ больше чем $998 - m$ синих и $k > 988$). Следовательно, все отрезки, красные концы которых находятся среди $A_1, A_2, \ldots, A_k$, покрывают отрезок A_kA_{k+1}. То же самое верно с заменой красных концов на синие, т. е. отрезок A_kA_{k+1} покрыт k отрезками (а при $k > 998$ покрыт $1996 - k$ отрезками). Но большим числом он и не может быть покрыт. Следовательно, сумма, достигнутая Васей, равна

$$1 + 2 + \ldots + 997 + 998 + 997 + \ldots + 2 + 1 = 998^2$$

отрезкам между соседними точками (эти отрезки равны по условию) и не зависит от раскраски, сделанной Петей.

11 класс

Б25. См. решение задачи **Б17.**

Б26. Ответ: n медиан.

Покажем, что через каждую точку A системы проходит хотя бы одна медиана. Действительно, пусть слева от прямой l, проходящей через точку A, меньше точек системы, чем справа. Будем вращать прямую l вокруг точки A. При этом точки системы могут попадать на прямую и сходить с прямой только по одной (так как никакие три точки системы не лежат на одной прямой). Когда прямая повернется на 180°, справа от нее окажется столько точек, сколько сначала было слева, и наоборот. Поэтому в процессе вращения существовал момент, когда с обеих сторон от прямой точек было поровну. В этот момент прямая l оказалась медианой системы, поскольку иначе общее число точек слева и справа от нее было бы нечетным.

На каждой медиане лежит ровно две точки из данной системы, поэтому количество медиан не может быть меньше n. Пример системы, где медиан ровно n, дают вершины выпуклого $2n$-угольника.

Б27. Предположим противное: нашлась точка O треугольника, не покрытая кругами. Один из углов $\angle AOB$, $\angle BOC$, $\angle AOC$ (пусть $\angle AOC$) не меньше 120°. Тогда его косинус не больше чем $-\frac{1}{2}$, откуда

$$AC^2 = OA^2 + OC^2 - 2 \cdot OA \cdot OC \cos \angle AOC \geqslant$$
$$\geqslant OA^2 + OC^2 + OA \cdot OC > \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1.$$

Значит, $AC > 1$, но это противоречит тому, что наибольшая сторона треугольника равна 1.

Б28. Ответ: $\frac{n}{2}$ при четном n; $\frac{n+1}{2}$ при нечетном n.

Обозначим данный многочлен через $P(x)$. Между любыми двумя корнями дифференцируемой функции есть корень ее производной. Значит, производная $P(x)$ имеет по крайней мере $n - 1$ различных действительных корней. Так как $P'(x)$ — многочлен степени $n - 1$, то все его действительные корни различны. Повторяя проведенное рассуждение, убеждаемся, что тем же свойством обладают и все старшие производные $P^{(k)}(x)$ $(k = 2, \ldots, n - 1)$ данного многочлена. Отсюда следует, что из любых двух соседних коэффициентов многочлена $P(x)$ хотя бы один не равен нулю. (В самом деле, пусть у $P(x)$ равны нулю коэффициенты при x^k и x^{k+1}. Тогда у его k-й производной $P^{(k)}(x)$ равны нулю свободный член и коэффициент при x. Но это означает, что 0 — кратный корень многочлена $P^{(k)}(x)$, все корни которого должны быть различными.)

Теперь разобьем все коэффициенты многочлена $P(x)$ на пары стоящих рядом (оставив при четном n старший коэффициент без пары). Поскольку старший коэффициент многочлена не равен нулю, число ненулевых коэффициентов не превосходит числа полных пар, т. е. $\frac{n}{2}$ при четном n и $\frac{n+1}{2}$ при нечетном n. С другой стороны, многочлены $(x^2 - 1)(x^2 - 4)...(x^2 - k^2)$ и $x(x^2 - 1)(x^2 - 4) ... (x^2 - k^2)$ служат примерами (соответственно для $n = 2k$ и $n = 2k + 1$) того, когда число нулевых коэффициентов равно указанному в ответе.

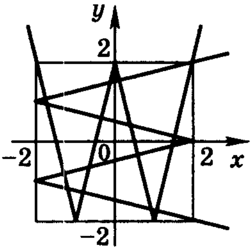

Рис. Б11

Б29. Ответ: 16.

Пусть x_0 — решение уравнения $f(f(x)) = x$, а $y_0 = f(x_0)$. Тогда и $x_0 = f(y_0)$, а поэтому точка с координатами $(x_0;\ y_0)$ лежит на каждом из графиков уравнений $y = f(x)$ и $x = f(y)$. Наоборот, если точка $(x_0;\ y_0)$ принадлежит пересечению этих графиков, то $y_0 = f(x_0)$ и $x_0 = f(y_0)$, откуда $f(f(x_0) = x_0$. Тем самым показано, что число решений уравнения $f(f(x)) = x$ совпадает с числом точек пересечения графиков уравнений $y = f(x)$ и $x = f(y)$, а их 16 (рис. Б11).

Б30. Ответ: $n = 2$.

Пусть $x = \dfrac{(a - c)(b - d)}{(b - c)(a - d)}$. Тогда

$$\frac{(a - b)(d - c)}{(b - c)(a - d)} = 1 - x, \quad \frac{(b - c)(a - d)}{(a - c)(b - d)} = \frac{1}{x},$$

$$\frac{(a - c)(b - d)}{(a - b)(c - d)} = \frac{x}{1 - x}.$$

Отсюда $x \neq 0$ и $x \neq 1$. Два из этих выражений должны быть равны n. Рассмотрим все возможные случаи равенства. Случаи $\frac{1}{x} = 1 - x$, $\frac{1}{x} = \frac{x}{1 - x}$ и $\frac{x}{1 - x} = 1 - x$ приводят к уравнению $x^2 - x + 1 = 0$, не имеющему корней. Случай $\frac{1}{x} = x = n$ также не подходит, поскольку $x \neq 1$, а $n \neq -1$. Случай $x = 1 - x$ не приводит к натуральному решению. Случай $\frac{x}{1 - x} = x$ дает натуральное решение $n = 2$. Это значение принимается, например, при $a = 1$, $b = 3$, $c = 4$, $d = 7$.

Б31. Пусть D — точка пересечения продолжения отрезка CO с окружностью, описанной около треугольника ABC (рис. Б12). Тогда $\angle\ BDO = \angle\ A$, следовательно, $\angle OBD = \angle\ COB - \angle\ BDO = 60°$. Аналогично, $\angle ADO = \angle B$ и $\angle OAD = 60°$. По теореме синусов для ΔOBD: $\frac{BO}{\sin A} = \frac{OD}{\sin 60°}$; по теореме синусов

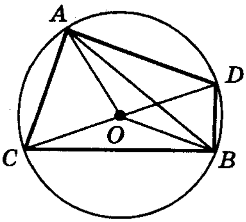

Рис. Б12

для ΔOAD: $\frac{AO}{\sin B} = \frac{OD}{\sin 60°}$. Поэтому $\frac{AO}{\sin B} = \frac{BO}{\sin A}$, откуда $AO : \frac{h_a}{c} = BO : \frac{h_b}{c}$, или $\frac{AO}{h_a} = \frac{BO}{h_b}$. Аналогично доказывается, что $\frac{CO}{h_c} = \frac{BO}{h_b}$, т. е. отрезки AO, BO и CO пропорциональны высотам треугольника ABC. Это и доказывает требуемое утверждение, а подобие треугольников следует из двух последних равенств.

Б32. Ответ: не существует.

Пусть X_i — член последовательности с номером i. Натуральное число n назовем периодом, если $X_i = X_{i+n}$ при всех целых i. Предположим, что такая последовательность существует и n — ее наименьший период. Рассмотрим три случая: $n = 3m$, $n = 3m + 1$ и $n = 3m + 2$ (m — натуральное число).

Пусть $n = 3m$. Так как $n > m$, то найдется i такое, что $X_i = X_{i+m}$ (в противном случае m было бы периодом, меньшим n). Пусть $X_i = a$, $X_{i+m} = b$. Заменив все члены последовательности $X_i, \ldots, X_{i+m}$ по правилу $a \to aba$, $b \to bba$, получим фрагмент последовательности:

$$aba{*}{*}{*}\ldots{*}{*}{*}bba\ (3m - 3 \text{ звездочки}). \qquad (1)$$

Так как $3m$ — период, то начальная тройка букв этого фрагмента должна совпадать с конечной. Получили противоречие. Аналогично приходим к противоречию, если $X_i = b$, $X_{i+m} = a$.

Пусть, далее, $n = 3m + 1$. Тогда, как и выше, найдется i такое, что $X_i \neq X_{i+m}$. Если $X_i = a$, $X_{i+m} = b$, то первая пара букв фрагмента (1) должна совпадать с последней, т. е. получили противоречие. Аналогичное противоречие возникает, если $X_i = b$, $X_{i+m} = a$.

Пусть, наконец, $n = 3m + 2$. Покажем, что обязательно найдется пара $X_i = b$, $X_{i+m} = a$. Предположим, что это неверно, т. е. если $X_i = b$, то и $X_{i+m} = b$. Тогда из того, что последовательность имеет фрагмент bba, следует, что у нее есть фрагмент $X_i, \ldots, X_{i+3m+4}$ вида $bba{*}\ldots{*}bb{*}\ldots{*}bb{*}{*}\ldots{*}bb$ (в каждом промежутке $m - 1$ звездочка). Приходим к противоречию: $X_{i+2} = a \neq X_{i+3m+4} = b$. Итак, существует пара $X_i = b$, $X_{i+m} = a$ и последовательность содержит фрагмент $bba{*}\ldots{*}{*}{*}aba$ ($3m - 3$ звездочки).

Но тогда снова возникает противоречие: $X_i = b \neq$ $\neq X_{i+3m+2} = a$.

Олимпиада 1997 г.

8 класс

Б33. Если рядом с числом 16 стоит число x, то $16 + 1 \leqslant 16 + x = a^2 \leqslant 16 + 15$, откуда $a^2 = 25$ и $x = 9$. Поэтому у числа 16 не может быть более одного соседа и удовлетворяющее условию расположение чисел по кругу невозможно. Пример расположения в строку: 16, 9, 7, 2, 14, 11, 5, 4, 12, 13, 3, 6, 10, 15, 1, 8.

Б34. Занумеруем яблоки в порядке неубывания весов и положим в k-й пакет яблоки с номерами k и $301 - k$. Для любых двух пакетов получаем, что в одном из них — яблоки, имеющие вес a и d, в другом — имеющие вес c и d, где $a \leqslant b \leqslant c \leqslant d$. Тогда

$$a + d \leqslant c + 2b \leqslant 1{,}5c + 1{,}5b$$

и

$$b + c \leqslant 2a + d \leqslant 1{,}5a + 1{,}5d,$$

что и требовалось доказать.

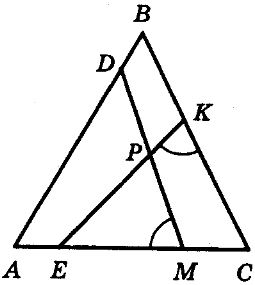

Рис. Б13

Б35. Из условия следует, что $CE = AC - AE = AD$ и, аналогично, $CK = AM$ (рис. Б13). Отсюда получаем, что $\Delta MAD = \Delta ECK$ и, значит, $\angle MPE = 180° - \angle PME - \angle PEM = 180° - \angle PKC - \angle PEC = \angle C = 60°$. Если отрезки DM и EK не пересекаются, то аналогичные рассуждения проводятся для вертикальных углов.

Б36. Если на предприятии k «верховных» начальников, то каждый работник должен увидеть хотя бы один из k приказов этих начальников. В понедельник их увидели не более $7k$ работников, во вторник — не более $7k \cdot 6$, в среду — не более $7k \cdot 36$ работников. Все, кто увидел эти приказы в четверг, не имеют подчиненных: значит, они все имеют по 7 начальников и количество всех их начальников не более $7k \cdot 36$, т. е. в четверг приказы увидели не более $6k \cdot 36$ работников. Таким образом, $50\,000 \leqslant k + 7k + 42k + 254k + 216k = 518k$ и $k \geqslant 97$.

Б37. Пусть O — точка пересечения биссектрис треугольника ABC. Тогда $\angle OAB < 45°$, $\angle OBA < 45°$, поэтому точка O находится внутри K_1, значит, треугольник OAB покрывается квадратом K_1. Аналогично, треугольники OBC и OCA покрываются соответственно квадратами K_2 и K_3.

Б38. Ответ: 2.

Пусть на последнем месте в строке стоит число x. Сумма всех чисел в строке, кроме x, делится на x; но тогда и сумма всех чисел в строке, равная $1 + 2 + \ldots + 37 = 37 \cdot 19$, делится на x. Отсюда $x = 19$, так как число 37 уже поставлено на первое место. На третьем месте стоит делитель числа $37 + 1 = 38$, отличный от его делителей 1 и 19, которые уже стоят на других местах. Итак, на третьем месте написано число 2.

Б39. Ответ: $p = 7$, $q = 3$.

Пусть сначала ни одно из чисел p, q не делится на 3. Если остатки от деления p и q на 3 совпадают, то левая часть делится на 3, а правая — нет, если же эти остатки не совпадают, то правая часть делится на 3, а левая — нет.

Пусть теперь p делится на 3, тогда $p = 3$. Из равенства $p^3 - q^5 = (p + q)^2 > 0$ следует $p^3 > q^5$ и $q^5 < 27$, что невозможно.

Пусть, наконец, q делится на 3, тогда $q = 3$ и $p^3 - 243 = (p + 3)^2$, $p(p^2 - p + 6) = 252$, откуда вытекает, что p — простой делитель 252, т. е. 2, 3 или 7. Проверка показывает, что подходит только $p = 7$, значит, $(p, q) = (7, 3)$.

Б40. Ответ: 14 машинами.

Обозначим количество автомобилей в семье через n. Сумма чисел запрещенных дней по всем машинам, равная $2n$, не превосходит $7 \cdot (n - 10)$, поскольку в каждый из 7 дней недели снимаются с поездок не более $n - 10$ машин. Итак, $2n \leqslant 7(n - 10)$, откуда $n \geqslant 14$. Четырнадцати машин достаточно; нужно запретить четырем машинам понедельник и вторник, четырем — среду и четверг, двум — пятницу и субботу, двум — субботу и воскресенье, двум — пятницу и воскресенье.

9 класс

Б41. Окружность, описанная около правильного 1997-угольника, является описанной и для любого треугольника данного разбиения. Так как центр окружности, описанной около правильного 1997-угольника, не лежит на диагонали, то он попадет внутрь какого-то одного треугольника.

Треугольник является остроугольным, если центр описанной окружности лежит внутри него, и тупоугольным, если центр описанной окружности лежит вне его.

Следовательно, треугольник, в который попал центр описанной окружности, — остроугольный, все остальные — тупоугольные.

Б42. Ответ: выигрывает партнер игрока, делающего первый ход.

Укажем, как партнер начинающего может гарантировать себе выигрыш. В начале партии он должен стирать числа, кратные 3, до тех пор, пока таковых не останется. Поскольку количество чисел, не превосходящих 1000 и кратных 3, равно 333, партнеру начинающего понадобится не более 333 ходов для того, чтобы ни одно из оставшихся на доске чисел не делилось на 3 (некоторые из чисел, кратных 3, могут быть стерты и начинающим). После этого партнер начинающего делает свои ходы произвольно вплоть до того момента, когда на доске останется три числа. Каждое из них будет давать остаток 1 или 2 при делении на 3, поэтому среди трех остающихся на доске чисел обязательно найдется два, дающих одинаковые остатки. Именно их должен оставить партнер начинающего (сумма не будет делиться на 3).

Б43. Занумеруем яблоки в порядке возрастания их веса и разобьем их на пары: в k-ю пару поместим k и $301 - k$ яблок. Докажем, что веса пар различаются не более чем в 2 раза. Пусть яблоки имеют вес a, b, c, d. Имеем: $0 \leqslant a \leqslant b \leqslant c \leqslant d \leqslant 3a$. Тогда $a + d \leqslant 4a \leqslant b + c$, $b + c \leqslant 3a + d \leqslant 2a + 2d$. Проведем с парами яблок ту же процедуру. Аналогично доказывается, что веса четверок яблок различаются не более чем в 1,5 раза, что и требовалось установить.

Б44. Запрещенных «сочетаний цифр» конечное число, следовательно, существует число N такое, что все запрещенные «сочетания цифр» не длиннее N символов. В бесконечной десятичной дроби можно найти два одинаковых куска длины N. Пусть у дроби a_0, a_1a_2, ... куски $a_k...a_{k+N-1}$ и a_{l+N-1} совпали. Докажем, что дробь 0, $(a_k...a_{l-1})$ удовлетворяет условию. Предположим противное: в этой дроби есть запрещенные «сочетания цифр». Возьмем то из них, которое встретится самым первым. Очевидно, что хотя бы один символ из данного запрещенного «сочетания цифр» попадет в первый период. Но тогда конец этого «сочетания цифр» имеет номер не более $l - 1 - k + N$, т. е. оно будет содержаться в куске $a_k \ldots a_{l+N-1}$ исходной дроби.

Б45. Пусть сумма чисел в наборе равна M, тогда число a из набора заменяется на число $b = M - a$. Просуммируем эти равенства для всех a:

$$b_1 + \ldots + b_{1997} = 1997M - (a_1 + \ldots + a_{1997}),$$

откуда $M = 0$, так как $b_1 + \ldots + b_{1997} = a_1 + \ldots + a_{1997} = M$. Значит, для любого a число $b = -a$ также входит в набор и все числа разбиваются на пары a; $-a$. Поскольку общее количество чисел нечетно, заключаем, что в набор входит число $a = -a$, т. е. $a = 0$.

Б46. См. решение задачи **Б38.**

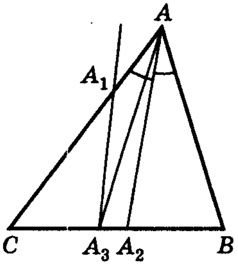

Рис. Б14

Б47. Пусть биссектриса угла A пересекает BC в точке A_2, а прямая l_A — в точке A_3 (рис. Б14). Точно так же определим точки B_2, B_3, C_2 и C_3. Тогда если $CA_3 \leqslant CA_2$ (другой случай рассматривается аналогично), то

$$A_3B = CB - CA_3 = CA_2 + BA_2 - CA_3 = = CA_2\left(1 + \frac{AB}{AC}\right) - CA_3$$

в силу свойства биссектрисы. Следовательно, по теореме Фалеса имеем

$$A_3B = CA_3\left(\frac{CA_2}{CA_3}\left(1 + \frac{AB}{AC}\right) - 1\right) =$$

$$= CA_3\left(\frac{AC}{CA_1}\left(1 + \frac{AB}{AC}\right) - 1\right) = CA_3,$$

так как по условию $AC + AB = 2CA_1$. Итак, вершины треугольника $A_3B_3C_3$ являются серединами сторон треугольника ABC, поэтому l_A, l_B и l_C пересекаются в одной точке.

Б48. См. решение задачи **Б40.**

Б49. В памяти есть число x. Складывая его с самим собой, получаем $2x$. Сравниваем эти числа (x и $2x$). Если они равны, то $x \neq 1$, в противном случае найдем корни уравнения $y^2 + 2xy + x = 0$, т. е. $y_{1,2} = -x \pm \sqrt{x^2 - x}$. Если $y_1 \neq y_2$ или корней нет, то $x \neq 1$, в противном случае $x = 1$.

Б50. Пусть вершины A, $C \in S_1$, а вершины B, $D \in S_2$. Пусть O — точка пересечения диагоналей прямоугольника $ABCD$. Проведем через M и O прямую до следующего пересечения с S_1 и S_2 в точках N_1 и N_2 соответственно. Так как точка O лежит внутри обеих окружностей, то N_1 и N_2 лежат по одну сторону от O. При этом по теореме о пересекающихся хордах $MO \cdot ON_1 = AO \times OC = BO \cdot OD = MO \cdot ON_2$, так как $AO = OC = OB = OD$, а значит, $ON_1 = ON_2$ и $N_1 = N_2 = N$. Обратно, проведя через любую точку O, взятую между M и N, хорды AC и BD в окружностях S_1 и S_2 так, что $AO = OC$, $BO = OD$, из теоремы о пересекающихся хордах получим $AO^2 = MO \cdot ON = BO_2$. Следовательно, $AO = OC = BO = OD$, т. е. $ABCD$ — прямоугольник.

Б51. Из равенства

$$2^{kn} - 1 = (2^n - 1)(2^{n(k-1)} + 2^{n(k-2)} + \ldots + 1)$$

следует, что $2^{kn} - 1$ делится на $2^n - 1$, поэтому

$$2^{kn+d} - 1 = 2^{kn+d} - 2^d + 2^d - 1 =$$
$$= 2^d(2^{kn} - 1) + 2^d - 1 \equiv 2^d - 1 (\mathrm{mod}\ 2^n - 1).$$

Таким образом, $2^n - 1$ делится на $2^m - 1$ тогда и только тогда, когда n делится на m. Если $n = km$, то

$$\frac{2^{km} - 1}{2^m - 1} = 1 + 2^m + \ldots + 2^{m(k-1)}.$$

Каждое слагаемое при делении на $2^m - 1$ дает остаток 1, значит,

$$\frac{2^{km} - 1}{2^m - 1} \equiv k\ (\mathrm{mod}\ 2^m - 1).$$

Тогда $k = \frac{n}{m}$ делится на $(2^m - 1)$, а это равносильно тому, что n делится на $m(2^m - 1)$.

Б52. Ответ: нельзя.

Закрасим 27 квадратиков указанных граней, как показано на рисунке Б15. Тогда любая полоска размера 1×3 закрывает четное число закрашенных квадратиков. Поэтому заклеить данные три грани полосками так, как требуется в условии (без наложений), не удастся.

Б53. Как и в задаче **Б45**, получаем, что числа в наборе разбиваются на пары a; $-a$. Числа различны, поэтому нуль не входит в набор. Значит, среди этих чисел 50 положительных и 50 отрицательных, т. е. их произведение положительно.

Б54. Ответ: 12 машин.

Докажем, что $n < 12$ машин не хватит. Если имеется n машин, то в сумме будет n «невыездных» дней, значит, в какой-то день не смогут выехать не менее $\frac{n}{7}$ машин. Поэтому в этот день будет не более $n - \frac{n}{7} = \frac{6}{7}n$ машин. Если $n < 12$, то $\frac{6}{7}n < 10$, следовательно, требование задачи не выполняется. Итак, $n \geqslant 12$.

Покажем, что 12 машин хватит. При 12 машинах у семьи имеется $(12 - 10) \cdot 7 = 14$ вакансий для «невы-

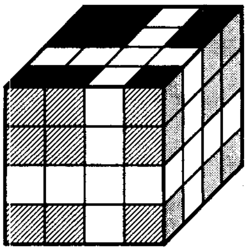

Рис. Б15

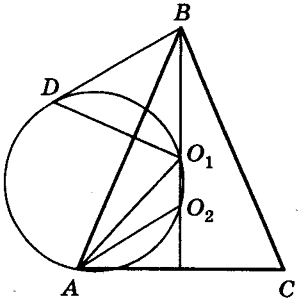

Рис. Б16

ездных» машино-дней. После выбора полицией «невыездного» дня очередной машины количество вакансий уменьшается на единицу. Поэтому можно организовать подачу полиции кандидатов в «невыездные» дни по следующей схеме: для каждой очередной машины выбираются два дня, каждый из которых выбран полицией в качестве «невыездного» не более чем для одного из предыдущих автомобилей. После регистрации по такой схеме 11 машин останется $14 - 11 = 3$ вакансии, т. е. для двенадцатого автомобиля останутся вакансии по крайней мере в два разных дня недели. Значит, при такой схеме регистрации семья сможет в каждый день недели использовать не менее 10 автомобилей.

Б55. Пусть O_1 — центр описанной окружности, тогда $BO_1 = DO_1 = AO_1$ (рис. Б16). Углы DO_2O_1 и DAO_1 равны, как вписанные. Далее угол DO_1B центральный, а угол DAB — вписанный, поэтому $\angle DO_1H = 2\angle DAB$. Для равнобедренного треугольника DO_1B имеем $\angle DO_1B = \pi - 2\angle BDO_1$. Четырехугольник DO_1O_2A вписанный, поэтому $\angle DO_1O_2 + \angle DAO_2 = \pi$. Из этого следует, что

$$\angle O_1DB + \angle DAB + \angle O_2AB = \pi.$$

Но O_2 — центр вписанной окружности, значит, $\angle O_2AB = \angle O_2AC$. Тогда получаем, что

$$\angle O_1DB + \angle O_2AC = \frac{\pi}{2};$$

$$\angle DO_2O_1 = \angle DAO_1 = \angle DAB + \angle BAO_1 =$$

$$= \angle DAB + \frac{\pi}{2} - 2\angle O_2AC = \pi - 2\angle O_2AC - \angle BDO_1 =$$

$$= \pi - 2(\angle O_2AC - \angle BDO) + \angle BDO_1 = \angle BDO_1.$$

Итак, $\angle DO_2O_1 = \angle BDO_1$, откуда следует, что BD — касательная.

Б56. Ясно, что условие задачи и справедливость доказываемого утверждения не изменятся, если из чисел a, b, c вычесть минимальное и прибавить его к x, y и z. Тогда без ограничения общности $a = 0$, $b \geqslant 0$, $c \geqslant 0$, и после некоторой циклической перестановки получим $x \leqslant y \leqslant z$ либо $x \geqslant y \geqslant z$. Рассмотрим равенство

$$\sqrt{x} + \sqrt{y + b} + \sqrt{z + c} = \sqrt{x + c} + \sqrt{y + c} + \sqrt{z}. \quad (1)$$

Вычитая из него $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}$ и преобразуя, имеем

$$b\left(\frac{1}{\sqrt{y + b} + \sqrt{y}} - \frac{1}{\sqrt{x + b} + \sqrt{x}}\right) =$$

$$= c\left(\frac{1}{\sqrt{y + c} + \sqrt{y}} - \frac{1}{\sqrt{z + c} + \sqrt{z}}\right). \quad (2)$$

Из условий $b \geqslant 0$, $c \geqslant 0$; $x \leqslant y \leqslant z$ либо $x \geqslant y \geqslant z$ получаем четыре возможности:

1. Если $b \geqslant 0$, $c > 0$, то $x = y = z$, что и требуется. (Иначе правая и левая части равенства (2) имели бы разные знаки.)

2. Если $b - c = 0$, то $a = b = c = 0$, что также удовлетворяет требованию задачи.

3. Если $b = 0$, $c > 0$, то из равенства, аналогичного (1), получим

$$c\left(\frac{1}{\sqrt{x + c} + \sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{y + c} + \sqrt{y}}\right) = 0;$$

значит, $x = y$, а из (2) $y = z$, что и требовалось доказать.

4. Если $b > 0$, $c = 0$, то аналогично предыдущему $x = y = z$.

11 класс

Б57. См. решение задачи **Б49**.

Б58. Пусть $M(x_0; y_0)$ — точка пересечения медиан. Прямая $x = x_0$ делит квадрат на две части. В одной из частей находится ровно одна точка (вершина треугольника). Пусть она имеет координаты $A(x_1; y_1)$ и две другие $B(x_2; y_2)$, $C(x_3; y_3)$. Тогда $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$ и, значит, $|x_0 - x_1| = |x_0 - x_2| + |x_0 - x_3|$. Поэтому после отражения относительно точки M точки B и C перейдут в полосу, ограниченную прямыми $x = x_0$ и $x = x_1$. Проведя аналогичные рассуждения для y, получим, что какие-то две точки перешли в полосу, ограниченную прямыми $y = y_0$ и $y = y'$ (где y' — координата по y одной из вершин треугольника). Одной из этих точек будет B или C, и после отражения относительно M она, как мы доказали, останется внутри квадрата.

З а м е ч а н и е. В действительности верен более общий факт.

Если треугольник, расположенный внутри квадрата, симметрично отразить относительно любой точки, лежащей внутри него, то по крайней мере одна вершина треугольника останется внутри квадрата.

Докажем это утверждение. Обозначим через P_A множество центров симметрии, при отражении относительно которых образ точки A останется в квадрате (рис. Б17). Легко видеть, что P_A — это образ квадрата K при гомотетии с центром A и коэффициентом $k = \frac{1}{2}$. Аналогично определим P_B, P_C. Тогда утверждение задачи равносильно следующему: квадраты P_A, P_B, P_C покрывают треугольник ABC.

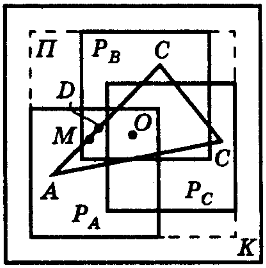

Рис. Б17

Квадрат P_A содержит образ квадрата K при гомотетии с коэффициентом $k = \frac{1}{2}$, т. е. вершины B; значит, точка D (середина отрезка AB) лежит в P_A. Аналогично, $D \in P_B$, т. е. квадраты P_A и P_B пересекаются. Так же доказывается, что P_C пересекается с P_A и P_B.

Возьмем теперь наименьший прямоугольник $П$ со сторонами, параллельными сторонам квадрата K, содержащий все квадраты P_A, P_B, P_C. Эти квадраты имеют равные стороны $\frac{a}{2}$, где a — сторона квадрата K, поэтому длины сторон прямоугольника $П$ не больше a, значит, центр O прямоугольника Π лежит в каждом из квадратов P_A, P_B, P_C. Соединим точку O с любой точкой M на стороне треугольника ABC. Точка M лежит в одном из квадратов P_A, P_B или P_C (так, если $M \in [AD]$, то $M \in P_A$), поэтому отрезок OM лежит в этом квадрате. Такие отрезки OM покрывают весь треугольник ABC, следовательно, он покрыт квадратами P_A, P_B, P_C, что и требовалось доказать.

Б59. Предположим, что имеется лишь конечное число таких натуральных n, тогда для всех n, начиная с некоторого, $S(3^n) < S(3^{n+1})$. Но 3^n и 3^{n+1} делятся на 9, поэтому $S(3^n)$ и $S(3^{n+1})$ делятся на 9, откуда $S(3^n) \leqslant \leqslant S(3^{n+1}) - 9$. Тогда $S(3^{N+k}) \geqslant S(3^N) + 9k > 9k$, значит, число имеет более k знаков: $3^{N+k} > 10^k$. Отсюда, при $k = N$ получаем $3^{2N} > 10^N$, т. е. противоречие.

Б60. См. решение задачи **Б52.**

Б61. Пусть A и B — комиссии. Тогда $\overline{A \cup B} = \bar{A}$ является комиссией, значит, $\overline{\overline{A \cup B}} = A \cup B$ также комиссия.

Б62. Так как $\log_a b > 1$, то $\log_a \log_a b > \log_b \log_a b$, а так как $\log_c a < 1$, то $\log_c \log_c a > \log_b \log_c a$. Отсюда

$$\log_a \log_a b + \log_b \log_b c + \log_c \log_c a >$$
$$> \log_b \log_a b + \log_b \log_b c + \log_b \log_c a =$$
$$= \log_b (\log_a b \cdot \log_b c \cdot \log_c a) = \log_b 1 = 0.$$

Б63. Ответ: не существуют.

Предположим, что $ABCD$ и $SA_1A_2...A_n$ такие треугольная и n-угольная пирамиды, что четыре трехгранных угла n-угольной пирамиды, имеющие вершины A_i, A_j, A_k, A_l, равны трехгранным углам A, B, C и D треугольной пирамиды. Тогда сумма всех плоских углов трехгранных углов с вершинами A_i, A_j, A_k, A_l равна $4 \cdot 180° = 720°$. С другой стороны, согласно свойству трехгранных углов, $\angle A_{m-1}A_mA_{m+1} < \angle A_{m-1}A_mS + \angle A_{m+1}A_mS$, поэтому

$$\angle A_{i-1}A_iA_{i+1} + \angle A_{j-1}A_jA_{j+1} + \angle A_{k-1}A_kA_{k+1} + \angle A_{l-1}A_lA_{l+1} < \frac{1}{2} \cdot 720° = 360°.$$

Но сумма всех углов многоугольника $A_1A_2...A_n$ равна $180° \cdot (n-2)$, поэтому сумма остальных $n-4$ углов многоугольника больше $180°(n-2) - 360° = 180°(n-4)$, что невозможно, так как многоугольник — выпуклый.

Б64. Ответ: $\alpha = 1$.

Для $\alpha = 1$ такая функция существует: $f(x) = x$. Для $\alpha \neq 1$ при любом x существует y такое, что $y = \alpha(x+y)$; $y = \dfrac{\alpha x}{1-\alpha}$. Тогда из уравнения $f(y) = f(x) + f(y)$ следует, что $f(x) = 0$ для любого x.

Часть В

ВСЕРОССИЙСКИЕ ОЛИМПИАДЫ

Условия задач

Олимпиада 1996 г.

9 класс

В1. Каких чисел больше среди натуральных чисел от 1 до 1 000 000 включительно: представимых в виде суммы точного квадрата и точного куба или не представимых в таком виде? (*А. Голованов*)

В2. Центры O_1, O_2 и O_3 трех непересекающихся окружностей одинакового радиуса расположены в вершинах треугольника. Из точек O_1, O_2, O_3 проведены касательные к данным окружностям так, как показано на рисунке В1. Известно, что эти касательные, пересекаясь, образовали выпуклый шестиугольник, стороны которого через одну покрашены в красный и синий цвета. Докажите, что сумма длин красных отрезков равна сумме длин синих отрезков. (*Д. Терешин*)

В3. Пусть натуральные числа x, y, p, n и k таковы, что $x^n + y^n = p^k$. Докажите, что если число n ($n > 1$) — нечетное, а число p — нечетное простое, то n является

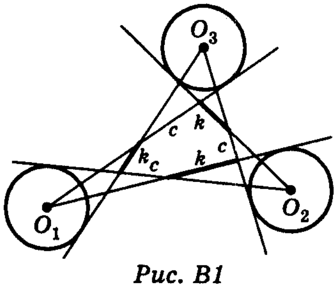

Рис. В1

степенью числа p (с натуральным показателем). (*А. Ковальджи*, *В. Сендеров*)

В4. В Думе 1600 депутатов, которые образовали 16 000 комитетов по 80 человек в каждом. Докажите, что найдутся два комитета, имеющие не менее четырех общих членов. (*А. Скопенков*)

В5. Докажите, что в арифметической прогрессии с первым членом, равным 1, и разностью, равной 729, найдется бесконечно много членов, являющихся степенью числа 10. (*Л. Купцов*)

В6. В равнобедренном треугольнике ABC ($AC = BC$) точка O — центр описанной окружности, точка I — центр вписанной окружности, а точка D на стороне BC такова, что прямые OD и BI перпендикулярны. Докажите, что прямые ID и AC параллельны. (*М. Сонкин*)

В7. На столе лежат две кучки монет. Известно, что сумма веса монет из первой кучки равна сумме веса монет из второй кучки, а для каждого натурального числа k, не превосходящего числа монет как в первой, так и во второй кучке, сумма веса k самых тяжелых монет из первой кучки не больше суммы веса k самых тяжелых монет из второй кучки. Докажите, что если заменить каждую монету, вес которой не меньше x, на монету веса x (в обеих кучках), то первая кучка монет окажется не легче второй, каково бы ни было положительное число x. (*Д. Фон-дер-Флаасс*)

В8. Можно ли прямоугольник 5×7 покрыть уголками из трех клеток (т. е. фигурками, которые получаются из квадрата 2×2 удалением одной клетки), не выходящими за его пределы, в несколько слоев так, чтобы каждая клетка прямоугольника была покрыта одинаковым числом клеток, принадлежащих уголкам? (*М. Евдокимов*)

10 класс

В9. На стороне BC выпуклого четырехугольника $ABCD$ взяты точки E и F (точка E ближе к точке B, чем точка F). Известно, что $\angle BAE = \angle CDF$ и $\angle EAF = \angle FDE$. Докажите, что $\angle FAC = \angle EDB$. (*М. Смуров*)

В10. На координатной плоскости расположены четыре фишки, центры которых имеют целочисленные координаты. Разрешается сдвинуть любую фишку на вектор, соединяющий центры любых двух из остальных фишек. Докажите, что несколькими такими перемещениями можно совместить любые две наперед заданные фишки. (*Р. Садыков*)

В11. Найдите все натуральные n такие, что при некоторых взаимно простых x и y и натуральном k, $k > 1$, выполняется равенство $3^n = x^k + y^k$. (*А. Ковальджи, В. Сендеров*)

В12. Докажите, что если числа $a_1, a_2, \ldots, a_m$ отличны от нуля и для любого целого $k = 0, 1, \ldots, n$ $(n < m - 1)$ выполняется равенство

$$a_1 + a_2 2^k + a_3 3^k + \ldots + a_m \cdot m^k = 0,$$

то в последовательности $a_1, a_2, \ldots, a_m$ есть по крайней мере $n + 1$ пара соседних чисел, имеющих разные знаки. (*О. Мусин*)

В13. В вершинах куба записали восемь попарно различных натуральных чисел, а на каждом его ребре — наибольший общий делитель двух чисел, записанных на концах этого ребра. Может ли сумма всех чисел, записанных в вершинах, оказаться равной сумме всех чисел, стоящих на ребрах? (*А. Шаповалов*)

В14. Во взводе служат три сержанта и несколько солдат-новобранцев. Сержанты по очереди дежурят по взводу. Командир издал такой приказ:

«1) За каждое дежурство должен быть дан хотя бы один наряд (вне очереди).

2) Никакой солдат не должен иметь более двух нарядов и получить более одного наряда за одно дежурство.

3) Списки получивших наряды ни за какие два дежурства не должны совпадать по составу.

4) Сержант, первым нарушивший одно из изложенных выше правил, наказывается гауптвахтой».

Сможет ли хотя бы один из сержантов, не сговариваясь с другими, давать наряды так, чтобы не попасть на гауптвахту согласно данному приказу? (*М. Куликов*)

B15. Дан выпуклый многоугольник, никакие две стороны которого не параллельны. Для каждой из его сторон рассмотрим угол, под которым она видна из вершины, наиболее удаленной от прямой, содержащей эту сторону. Докажите, что сумма всех таких углов равна $180°$. (*М. Смуров*)

B16. Знайка пишет на доске 10 чисел, потом Незнайка дописывает еще 10 чисел, причем все 20 чисел должны быть положительными и различными. Может ли Знайка выписать свои 10 чисел так, что, независимо от того, что напишет Незнайка, он сможет составить 10 квадратных трехчленов вида $x^2 + px + q$, среди коэффициентов p и q которых встречались бы все записанные числа и действительные корни этих трехчленов принимали ровно 11 различных значений? (*И. Рубанов*)

11 класс

B17. Может ли число, получаемое выписыванием в строку друг за другом целых чисел от 1 до n ($n > 1$), одинаково читаться слева направо и справа налево? (*Н. Агаханов*)

B18. Несколько путников движутся с постоянными скоростями по прямолинейной дороге. Известно, что в течение некоторого периода времени сумма попарных расстояний между ними монотонно уменьшалась. Докажите, что в течение того же периода сумма расстояний от некоторого путника до всех остальных также монотонно уменьшалась. (*А. Шаповалов*)

B19. Докажите, что при $n \geqslant 5$ сечение пирамиды, в основании которой лежит правильный n-угольник, не может являться правильным $(n + 1)$-угольником. (*Н. Агаханов, Д. Терешин*)

B20. См. условие задачи **B12**.

В21. Существуют ли три натуральных числа, больших 1 и таких, что квадрат каждого из них, уменьшенный на единицу, делится на каждое из остальных? (*А. Голованов*)

В22. В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = BC$) проведена биссектриса CD. Прямая, перпендикулярная CD и проходящая через центр описанной около треугольника ABC окружности, пересекает BC в точке E. Прямая, проходящая через точку E параллельно CD, пересекает AB в точке F. Докажите, что $BE = FD$. (*М. Сонкин*)

В23. Существует ли такое конечное множество M ненулевых вещественных чисел, что для любого натурального n найдется многочлен степени не меньше n с коэффициентами из множества M, все корни которого вещественны и также принадлежат M? (*Е. Малинникова*)

В24. В строку в неизвестном порядке записаны все целые числа от 1 до 100. За один вопрос про любые 50 чисел можно узнать, в каком порядке относительно друг друга записаны эти числа. За какое наименьшее число вопросов наверняка можно узнать, в каком порядке записаны все 100 чисел? (*С. Токарев*)

Олимпиада 1997 г.

9 класс

В25. Пусть $P(x)$ — квадратный трехчлен с неотрицательными коэффициентами. Докажите, что для любых действительных чисел x и y справедливо неравенство $(P(xy))^2 \leqslant P(x^2) \cdot P(y^2)$. (*Е. Малинникова*)

В26. Выпуклый многоугольник M переходит в себя при повороте на угол 90°. Докажите, что найдутся два круга с отношением радиусов, равным $\sqrt{2}$, один из которых содержит M, а другой содержится в M. (*А. Храбров*)

В27. Боковая поверхность прямоугольного параллелепипеда с основанием $a \times b$ и высотой c (a, b и c — натуральные числа) оклеена без наложений и пропусков прямоугольниками со сторонами, параллельными ребрам параллелепипеда так, что каждый из прямоугольников состоит из четного числа единичных квадратов. При этом разрешается перегибать прямоугольники через боковые ребра параллелепипеда. Докажите, что если c нечетно, то число способов оклейки четно. (*Д. Карпов, С. Рукшин, Д. Фон-дер-Флаасс*)

В28. Переаттестация Совета Мудрецов происходит так: король выстраивает их в колонну по одному и надевает на голову каждому колпак белого или черного цвета. Каждый мудрец видит цвета колпаков всех впереди стоящих мудрецов, но не видит цвет своего колпака и цвета колпаков мудрецов, стоящих позади него. Затем мудрецы по одному называют какой-нибудь цвет (каждому разрешается говорить только один раз). После этого король казнит всех мудрецов, не угадавших цвет своего колпака. Накануне переаттестации все члены Совета договорились между собой и придумали, как минимизировать число казненных. Скольким из них удастся гарантированно избежать казни? (*К. Кноп*)

В29. Существуют ли действительные числа b и c такие, что каждое из уравнение $x^2 + bx + c = 0$ и $2x^2 + (b + 1)x + c + 1 = 0$ имеет по два целых корня? (*Н. Агаханов*)

В30. В классе 33 человека. У каждого ученика спросили, сколько у него в классе тёзок и сколько однофамильцев (включая родственников). Оказалось, что среди названных чисел встретились все целые, от 0 до 10 включительно. Докажите, что в классе есть два ученика с одинаковыми именем и фамилией. (*А. Шаповалов*)

В31. Окружность, вписанная в треугольник ABC, касается его сторон AB, BC и CA в точках M, N и K соответственно. Прямая, проходящая через вершину A и параллельная NK, пересекает прямую MN в точке D. Прямая, проходящая через A и параллельная MN, пересекает прямую NK в точке E. Докажите, что прямая DE содержит среднюю линию треугольника ABC. (*М. Сонкин*)

В32. В клетках таблицы 10×10 расставлены числа $1, 2, 3, \ldots, 100$ так, что сумма любых двух соседних чисел не превосходит S. Найдите наименьшее возможное значение S. (Числа называются соседними, если они стоят в клетках, имеющих общую сторону.) (*Д. Храмцов*)

10 класс

В33. Решите в целых числах уравнение

$$(x^2 - y^2)^2 = 1 + 16y.$$ (*М. Сонкин*)

В34. Квадрат $n \times n$ ($n \geqslant 3$) склеен в цилиндр. Часть клеток покрашена в черный цвет. Докажите, что найдутся две параллельных линии (две горизонтали, две вертикали или две диагонали), содержащие одинаковое количество черных клеток. (*Е. Порошенко*)

В35. Две окружности пересекаются в точках A и B. Через точку A проведена прямая, вторично пересекающая первую окружность в точке C, а вторую — в точке D. Пусть M и N — середины дуг BC и BD, не содержащих точку A, а K — середина отрезка CD. Докажите, что угол MKN прямой. (Можно считать, что точки C и D лежат по разные стороны от точки A.) (*Д. Терешин*)

В36. Многоугольник можно разбить на 100 прямоугольников, но нельзя — на 99. Докажите, что его нельзя разбить на 100 треугольников. (*А. Шаповалов*)

В37. Существует ли два квадратных трехчлена $ax^2 + bx + c$ и $(a + 1)x^2 + (b + 1)x + (c + 1)$ с целыми коэффициентами, каждый из которых имеет по два целых корня? (*Н. Агаханов*)

В38. Окружность с центром O, вписанная в треугольник ABC, касается сторон AC, AB и BC в точках K, M и N соответственно. Медиана BB_1 треугольника пересекает MN в точке D. Докажите, что точка O лежит на прямой DK. (*М. Сонкин*)

В39. Найдите все тройки натуральных чисел m, n и l такие, что $m + n = (\text{НОД}(m, n))^2$, $m + l = (\text{НОД}(m, l))^2$, $n + l = (\text{НОД}(n, l))^2$. (*С. Токарев*)

В40. На бесконечной в обе стороны полосе из клеток, пронумерованных целыми числами, лежит несколько камней (возможно, по нескольку в одной клетке). Разрешается выполнять следующие действия:

1°. Снять по одному камню с клеток $n - 1$ и n и положить один камень в клетку $n + 1$.

2°. Снять два камня с клетки n и положить по одному камню в клетки $n + 1$, $n - 2$.

Докажите, что при любой последовательности действий мы достигнем ситуации, когда указанные действия больше выполнять нельзя, и эта конечная ситуация не зависит от последовательности действий (а зависит только от начальной раскладки камней по клеткам). (*Д. Фон-дер-Флаасс*)

11 класс

В41. См условие задачи **В33**.

В42. Переаттестация Совета Мудрецов происходит так: король выстраивает их в колонну по одному и надевает каждому колпак белого, синего или красного цвета. Все мудрецы видят цвета всех колпаков впереди стоящих мудрецов, а цвет своего и всех стоящих сзади не видят. Каждую минуту кто-нибудь из мудрецов должен выкрикнуть один из трех цветов (каждый мудрец выкрикивает цвет один раз). После этого король казнит всех мудрецов, не угадавших цвет своего колпака. Накануне переаттестации все сто членов Совета Мудрецов договорились и придумали, как минимизировать число казненных. Скольким из них удастся гарантированно избежать казни? (*К. Кноп*)

В43. См. условие задачи **В35**.

В44. Куб $n \times n \times n$ сложен из единичных кубиков. Дана замкнутая несамопересекающаяся ломаная, каждое звено которой соединяет центры двух соседних (имеющих общую грань) кубиков. Назовем отмеченными грани кубиков, пересекаемые данной ломаной. Докажите, что ребра кубиков можно покрасить в два цвета так, чтобы каждая отмеченная грань имела нечетное число, а всякая неотмеченная грань — четное число сторон каждого цвета. (*М. Смуров*)

В45. Рассматриваются всевозможные квадратные трехчлены вида $x^2 + px + q$, где p, q — целые, $1 \leqslant p \leqslant 1997$, $1 \leqslant q \leqslant 1997$. Каких трехчленов среди них больше:

имеющих целые корни или не имеющих действительных корней? (*М. Евдокимов*)

В46. Даны многоугольник, прямая l и точка P на прямой l в общем положении (т. е. все прямые, содержащие стороны многоугольника, пересекают l в различных точках, отличных от P). Отметим те вершины многоугольника, для каждой из которых продолжения выходящих из нее сторон многоугольника пересекают l по разные стороны от точки P. Докажите, что точка P лежит внутри многоугольника тогда и только тогда, когда по каждую сторону от l отмечено нечетное число вершин. (*О. Мусин*)

В47. Сфера, вписанная в тетраэдр, касается одной из его граней в точке пересечения биссектрис, другой — в точке пересечения высот, третьей — в точке пересечения медиан. Докажите, что тетраэдр правильный. (*Н. Агаханов*)

В48. В прямоугольную коробку $m \times n$, где m и n — нечетные, уложены домино размера 2×1 так, что остался не покрыт только квадрат 1×1 (дырка) в углу коробки. Если доминошка прилегает к дырке короткой стороной, ее разрешается сдвинуть вдоль себя на одну клетку, закрыв дырку (при этом открывается новая дырка). Докажите, что с помощью таких передвижений можно перегнать дырку в любой другой угол. (*А. Шаповалов*)

Решения задач

Олимпиада 1996 г.

9 класс

В1. Ответ: чисел, не представимых в таком виде, больше.

Пусть $n = k^2 + m^3$, где $k, m, n \in N$, а $n \leqslant 1\,000\,000$. Ясно, что тогда $k \leqslant 1000$, а $m \leqslant 100$. Поэтому интересующее нас представление могут давать не более чем $100\,000$ пар (k, m). Но чисел n, удовлетворяющих указанному условию, заведомо меньше, чем таких пар, так как некоторые пары дают числа n, большие 1 000 000, а некоторые различные пары дают одно и то же число n.

B2. Введем обозначения так, как показано на рис. B2. Так как данные окружности имеют одинаковые радиусы, то

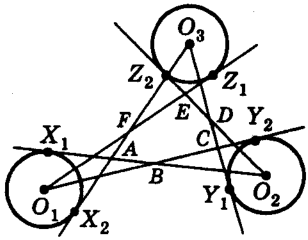

Рис. B2

$$X_1O_2 = O_1Y_2,\ Y_1O_3 = O_2Z_2,$$
$$Z_1O_1 = O_3X_2,$$

или

$$X_1A + AB + BO_2 = O_1B + BC + CY_2,$$
$$Y_1C + CD + DO_3 = O_2D + DE + EZ_2,$$
$$Z_1E + EF + FO_1 = O_3F + FA + AX_2.$$

Сложив эти равенства и заметив, что

$$X_1A = AX_2,\ Y_1C = CY_2,\ Z_1E = EZ_2$$

(как отрезки касательных, проведенных к окружности из одной точки) и

$$BO_2 = O_1B,\ DO_3 = O_2D,\ FO_1 = O_3F$$

(поскольку радиусы данных окружностей равны), получим $AB + CD + EF = BC + DE + FA$, что и требовалось доказать.

З а м е ч а н и я. 1. Аналогичное утверждение справедливо и в случае, изображенном на рисунке B3.

2. Справедливо такое утверждение: прямые AD, BE и CF пересекаются в одной точке (см. рис. B2 и B3).

3. Предыдущее утверждение остается справедливым, даже если отказаться от равенства данных окружностей (рис. B4).

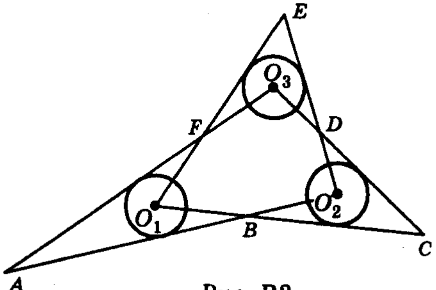

Рис. B3

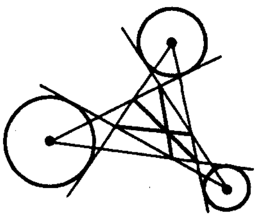

Рис. B4

В3. Пусть m = НОД(x, y). Тогда $x = mx_1$, $y = my_1$ и в силу данного в условии равенства $m^n(x_1^n + y_1^n) = p^k$, поэтому $m = p^\alpha$ для некоторого целого неотрицательного α. Следовательно,

$$x_1^n + y_1^n = p^{k - n\alpha}. \qquad (1)$$

Так как n нечетно, то

$$\frac{x_1^n + y_1^n}{x_1 + y_1} = x_1^{n-1} - x_1^{n-2}y_1 + x_1^{n-3}y_1^2 - \ldots -$$
$$- x_1y_1^{n-2} + y_1^{n-1}.$$

Обозначим правую часть равенства через A. По условию $p > 2$, следовательно, хотя бы одно из чисел x_1, y_1 больше 1, а так как $n > 1$, то и $A > 1$.

Из равенства (1) вытекает, что $A(x_1 + y_1) = p^{k - n\alpha}$; поскольку $x_1 + y_1 > 1$ и $A > 1$, каждое из этих чисел делится на p; более того, $x_1 + y_1 = p^\beta$ для некоторого натурального β. Тогда

$$A = x_1^{n-1} - x_1^{n-2}(p^\beta - x_1) + x_1^{n-3}(p^\beta - x_1)^2 - \ldots -$$
$$- x_1(p^\beta - x_1)^{n-2} + (p^\beta - x_1)^{n-1} = nx_1^{n-1} + Bp.$$

Число A делится на p, а число x_1 взаимно просто с p, следовательно, n делится на p.

Пусть $n = pq$. Тогда $x^{pq} + y^{pq} = p^k$, или $(x^p)^q + (y^p)^q = p^k$.

Если $q > 1$, то, как мы только что доказали, q делится на p. Если $q = 1$, то $n = p$. Повторяя это рассуждение, получим, что $n = p^l$ для некоторого натурального l.

В4. I способ. Предположим, что любые два комитета имеют не более трех общих членов. Пусть двое депутатов составляют списки всевозможных председателей на три заседания Думы. Первый считает, что любой депутат может быть председателем на каждом из этих заседаний, поэтому у него получилось 1600^3 списков. Второй считает, что на каждом заседании могут председательствовать только члены одного (не важно какого именно) комитета, поэтому сначала он запросил соответствующие списки от каждого комитета и получил $16\,000 \cdot 80^3$ списков. Так как каждые два комитета (а таких пар $\frac{16\,000 \cdot (16\,000 - 1)}{2}$) выдвинули всех своих общих членов, то второй депутат при формировании своих списков выбрал не более чем $\frac{16\,000 \cdot (16\,000 - 1)}{2} \cdot 3^3$ из списков, поданных комитетами. Очевидно, что списков, которые составил первый депутат, не меньше, чем списков, которые составил второй депутат, т. е.

$$1600^3 \geqslant 16\,000 \cdot 80^3 - \frac{16\,000 \cdot (16\,000 - 1)}{2} \cdot 3^3,$$

но

$$160000 \cdot 80^3 - \frac{16\,000 \cdot (16\,000 - 1)}{2} \cdot 3^3 >$$

$$> 16\,000 \cdot 80^3 - \frac{16\,000 \cdot (16\,000 - 1)}{2} \cdot \frac{4^3}{2} =$$

$$= \frac{16\,000 \cdot 4^3}{4} + 2^{13} \cdot 10^6 - 2^{12} \cdot 10^6 > 2^{12} \cdot 10^6 = 1600^3.$$

Получили противоречие.

II способ. Пусть N — число комиссий. Для каждого депутата выпишем все (неупорядоченные) пары комиссий, в которых он участвует. Если депутат участвует в K комиссиях, то для него выписано $\frac{K(K-1)}{2}$ пар.

Пусть $K_1, \ldots, K_{1600}$ — число комиссий, в которых участвуют депутаты с номерами 1, ..., 1600 соответственно. Тогда общее число выписанных пар равно

$$\frac{K_1(K_1 - 1)}{2} + \ldots + \frac{K_{1600}(K_{1600} - 1)}{2} =$$

$$= \frac{K_1^2 + \ldots + K^2{}_{1600}}{2} - \frac{K_1 + \ldots + K_{1600}}{2} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{2}\left(\frac{(K_1 + \ldots + K_{1600})^2}{1600} - (K_1 + \ldots + K_{1600})\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{(80N)^2}{1600} - 80N\right) = \frac{1}{2}N(4N - 80),$$

поскольку $K_1 + \ldots + K_{1600} = 80N$.

Если никакие три комиссии не имеют более чем по три общих члена, то общее число выписанных пар не превосходит $3\frac{N(N-1)}{2}$. Отсюда $\frac{1}{2}N(4N-80) \leqslant$ $\leqslant \frac{3N(N-1)}{2}$, т. е. $N \leqslant 77$. Для $N = 16\,000$ это неравенство неверно.

В5. Докажем, что для всех натуральных n число $10^{81n} - 1$ делится на 729. Действительно,

$$10^{81n} - 1 = (10^{81})^n - 1^n = (10^{81} - 1)\cdot A,$$

а

$$10^{81} - 1 = \underbrace{9\ldots9}_{81} =$$

$$= \underbrace{9\ldots9}_{9}\cdot 1\underbrace{0\ldots0}_{8}1\underbrace{0\ldots0}_{8}1\ldots1\underbrace{0\ldots0}_{8}1 =$$

$$= 9\cdot\underbrace{1\ldots1}_{9}\cdot 1\underbrace{0\ldots0}_{8}1\underbrace{0\ldots0}_{8}1\ldots1\underbrace{0\ldots0}_{8}1.$$

Второй и третий сомножители содержат по 9 единиц, поэтому суммы их цифр делятся на 9, т. е. и сами эти числа делятся на 9. Следовательно, $10^{81} - 1$ делится на $9^3 = 729$. Итак, мы доказали, что существует бесконечно много натуральных k таких, что $10^k - 1$ делится на 729, а это равносильно утверждению задачи.

В6. I способ.

Если данный треугольник — равносторонний (точки O и I совпадают), то утверждение очевидно. Пусть точка

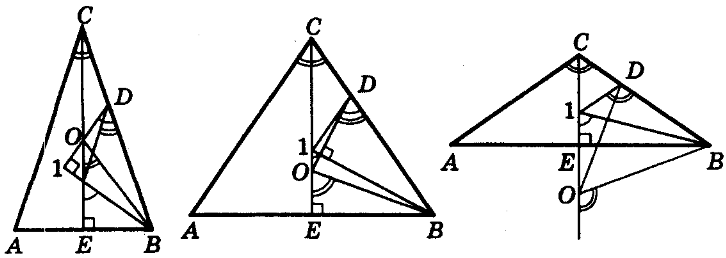

Рис. В5 *Рис. В6* *Рис. В7*

O лежит между точками I и C (рис. В5). Проведем высоту CE. Заметим, что

$$\angle EIB = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle ABC \text{ и } \angle ODB = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle ABC,$$

следовательно, $\angle OIB + \angle ODB = 180^\circ$, т. е. точки B, I, O и D лежат на одной окружности. Тогда $\angle IDB = \angle IOB$ (как вписанные, опирающиеся на дугу IB), но $\angle IOB = \frac{1}{2}\angle AOB = \angle ACB$. Итак, $\angle IDB = \angle ACB$, поэтому $ID \parallel AC$.

В случае, когда точка I лежит между точками O и C (рис. В6 и В7), ход решения остается таким же.

II способ.

Продолжим биссектрису BI до пересечения с описанной окружностью в точке E (рис. В8). Затем проведем прямую ED до пересечения с описанной окружностью в точке F. Пусть G и K — точки пересечения ED соответственно с AF и высотой CH. Прямая OD содержит диаметр, перпендикулярный хорде EB, поэтому $DE = DB$, т. е. треугольник EDB равнобедренный и $\angle DEB = \angle DBE$. Но тогда $\angle DEB = \angle ABE$, откуда $EF \parallel AB$, $EF \perp CI$. Теперь, используя теорему о вписанных углах, получаем $\angle CEF = \angle IEF = \angle CFE = \angle IFE$, откуда следует, что $ECFI$ — ромб. Тогда $CK = KI$ и (в силу симметрии точек G и D относительно CH) $GK = KD$. Значит, $GKDI$ также ромб и $CG \parallel DI$.

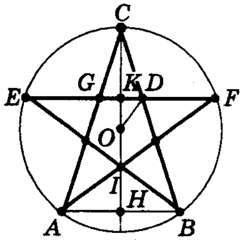

Рис. В8

В7. Пусть в первой кучке n монет с весами $x_1 \geqslant x_2 \geqslant \ldots \geqslant x_n$, а во второй кучке m монет с весами $y_1 \geqslant y_2 \geqslant \ldots \geqslant y_m$, причем

$$x_1 \geqslant \ldots \geqslant x_s \geqslant x \geqslant x_{s+1} \geqslant \ldots \geqslant x_n$$

и

$$y_1 \geqslant \ldots \geqslant y_t \geqslant x \geqslant y_{t+1} \geqslant \ldots \geqslant y_m$$

(если монет, вес которых не меньше x, вообще нет, то доказываемое утверждение очевидно). Тогда нужно доказать, что

$$xs + x_{s+1} + \ldots + x_n \geqslant xt + y_{t+1} + \ldots + y_m.$$

Так как $x_1 + \ldots + x_n = y_1 + \ldots + y_m = A$, то

$$xs + (A - (x_1 + \ldots + x_s)) \geqslant xt + (A - (y_1 + \ldots + y_t)),$$

поэтому доказываемое неравенство равносильно следующему:

$$x_1 + \ldots + x_s + x(t - s) \leqslant y_1 + \ldots + y_t.$$

Если $t \geqslant s$, то

$$x_1 + \ldots + x_s + x(t - s) = (x_1 + \ldots + x_s) + \underbrace{(x + \ldots + x)}_{t-s} \leqslant$$
$$\leqslant (y_1 + \ldots + y_s) + (y_{s+1} + \ldots + y_t),$$

так как $x_1 + \ldots + x_s \leqslant y_1 + \ldots + y_s$ (что сразу вытекает из условия), а $y_{s+1} \geqslant x, \ldots, y_t \geqslant x$.

Если же $t < s$, то

$$x_1 + \ldots + x_s + x(t - s) \leqslant y_1 + \ldots + y_t$$

равносильно неравенству

$$x_1 + \ldots + x_s \leqslant y_1 + \ldots + y_t + \underbrace{(x + \ldots + x)}_{t-s}.$$

Последнее неравенство следует из того, что

$$x_1 + \ldots + x_s \leqslant y_1 + \ldots + y_s =$$
$$= (y_1 + \ldots + y_t) + (y_{t+1} + \ldots + y_s),$$

а $y_{t+1} \leqslant x, \ldots, y_s \leqslant x$.

B8. О т в е т: нет.

I с п о с о б. Предположим, что удалось покрыть прямоугольник 5×7 уголками так, что каждая клетка покрыта k клетками уголков. Отметим в прямоугольнике 12 клеток, выделенных на рисунке B9. Любой уголок покрывает не более одной отмеченной клетки. Каждая отмеченная клетка покрыта k уголками, так что уголков не меньше чем $12k$. С другой стороны, клеток во всех уголках ровно $35k < 3 \cdot 12k$. Полученное противоречие показывает, что требуемого покрытия не существует.

II с п о с о б. Покрасим клетки прямоугольника в черный и белый цвета так, как показано на рисунке B9. В черные клетки запишем число -2, а в белые — число 1. Заметим, что сумма чисел в клетках, покрываемых лю-

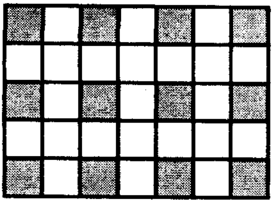

Рис. B9

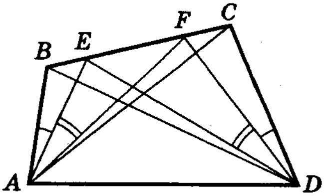

Рис. B10

бым уголком, неотрицательна, следовательно, если нам удалось покрыть прямоугольник в k слоев, удовлетворяющих условию, то сумма чисел S по всем клеткам, покрытым уголками, неотрицательна. Обозначив сумму всех чисел в прямоугольнике через S, получим $S = ks = k(-2 \cdot 12 + 23 \cdot 1) = -k < 0$, т. е. противоречие.

З а м е ч а н и е. Аналогично доказывается, что покрытия, удовлетворяющего условию задачи, не существует, если прямоугольник имеет размеры $3 \times (2n + 1)$ и 5×5. Прямоугольник 2×3 можно покрыть в один слой двумя уголками, прямоугольник 5×9 — в один слой пятнадцатью уголками, квадрат 2×2 — в три слоя четырьмя уголками. Комбинируя эти три покрытия, нетрудно доказать, что все остальные прямоугольники $m \times n$ ($m, n \geqslant 2$) можно покрыть уголками, удовлетворяющими требуемому условию.

10 класс

B9. Так как углы EAF и FDE равны, то четырехугольник $AEFD$ — вписанный (рис. B10). Поэтому $\angle AEF + \angle FDA = 180°$. В силу равенства углов BAE и CDF имеем

$$\angle ADC + \angle ABC =$$
$$= \angle FDA + \angle CDF + \angle AEF - \angle BAE = 180°.$$

Следовательно, четырехугольник $ABCD$ вписанный, откуда $\angle BAC = \angle BDC$, значит, $\angle FAC = \angle EDB$.

B10. Л е м м а. *Если три фишки лежат на одной прямой и имеют целые координаты, то можно совместить любые две из них.*

Доказательство. Пусть из трех попарных расстояний наименьшее будет между фишками A и B, тогда, сдвигая третью фишку на вектор $\overrightarrow{AB}$ или ему противоположный, добьемся того, чтобы третья фишка C оказалась на отрезке AB, после чего наименьшее из трех попарных расстояний уменьшится. В силу целочисленности расстояний между точками, лежащими на прямой, после нескольких таких операций наименьшее расстояние станет равно нулю. Если требуемые фишки совместились, то цель достигнута, иначе берем требующую совмещения фишку из этих двух совместившихся и переносим на оставшуюся. Лемма доказана.

Спроектируем фишки на одну из осей. Проекции ведут себя как и фишки, т. е. если фишка сдвигается на некоторый вектор, то ее проекция сдвигается на проекцию этого вектора. Совместим проекции двух заданных фишек, используя одну из двух оставшихся фишек в качестве третьей. Рассматривая две заданные фишки как одну (требуемое для нее движение повторяется дважды сначала для одной, затем для другой и их проекции по-прежнему совмещены после такой операции) и две оставшиеся, совместим заданные с любой из оставшихся. Получим три фишки с одинаковой проекцией, т. е. лежащие на одной прямой и имеющие целочисленные координаты. Среди них две фишки, требующие совмещения. Их можно совместить в силу приведенной выше леммы.

В11. Ответ: $n = 2$.

Пусть $3^n = x^k + y^k$, где x, y — взаимно простые числа ($x > y$), $k > 1$, n — натуральное. Ясно, что ни одно из чисел x, y не кратно трем. Поэтому, если k — четно, то x^k и y^k при делении на 3 дают в остатке 1, а значит, их сумма при делении на 3 дает в остатке 2, т. е. не является степенью 3.

Если k нечетно и $k > 1$, то $3^n = (x + y)(x^{k-1} + \ldots + y^{k-1})$. Тогда $x + y = 3^m$, $m \geqslant 1$. Покажем, что $n \geqslant 2m$. Так как k делится на 3 (см. решение задачи **В3**), то, положив $x_1 = x^{k/3}$, $y_1 = y^{k/3}$, можем считать, что $k = 3$. Итак, $x^3 + y^3 = 3^n$, $x + y = 3^m$. Чтобы доказать неравенство

$n \geqslant 2m$, достаточно показать, что $x^3 + y^3 \geqslant (x+y)^2$, или $x^2 - xy + y^2 \geqslant x + y$. Поскольку $x \geqslant y + 1$, имеем

$$x^2 - x = x(x-1) \geqslant xy,$$
$$(x^2 - x - xy) + (y^2 - y) \geqslant y(y-1) \geqslant 0,$$

т. е. неравенство $n \geqslant 2m$ справедливо.

Из тождества $(x-y)^3 - (x^3 + y^3) = 3xy(x+y)$ следует

$$3^{2m-1} - 3^{n-m-1} = xy. \qquad (1)$$

Но $2m - 1 \geqslant 1$ и

$$n - m - 1 \geqslant n - 2m \geqslant 0, \qquad (2)$$

поэтому, если в (2) хотя бы одно неравенство строгое, то в (1) левая часть делится на 3, а правая не делится. Если $n - m - 1 = n - 2m = 0$, то $m = 1$, $n = 2$ и $3^2 = 2^3 + 1^3$.

З а м е ч а н и е. Неравенство $x^2 - xy + y^2 \geqslant x + y$ можно доказать иначе:

$$x^2 - xy + y^2 - x - y = (x-y)^2 + (x-1)(y-1) - 1 \geqslant 0,$$

так как $(x-y)^2 \geqslant 1$.

B12. Можно считать, что $a_m > 0$; если это не так, то умножим все числа последовательности $a_1, a_2, \ldots, a_m$ на -1. Рассмотрим последовательность $b_1, b_2, \ldots, b_n$ такую, что $b_i = \sum\limits_{j=0}^{n} c_j i^j$, где $c_0, c_1, \ldots, c_n$ — произвольные действительные числа. Тогда из условия следует, что

$$\sum_{i=1}^{m} a_i b_i = \sum_{i=1}^{m} a_i \sum_{j=0}^{n} c_j i^j = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=0}^{n} a_i c_j i^j = \sum_{j=0}^{n}\sum_{i=1}^{m} a_i c_j i^j =$$
$$= \sum_{j=0}^{n} c_j \sum_{i=1}^{m} a_i i^j = \sum_{j=0}^{n} c_j \cdot 0 = 0.$$

Таким образом,

$$\sum_{i=1}^{m} a_i b_i = 0. \qquad (1)$$

Предположим теперь, что в последовательности $a_1, a_2, \ldots, a_m$ есть k пар соседних чисел, имеющих противоположные знаки, и $i_1, i_2, \ldots, i_k$ — индексы первых элементов в этих парах ($1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_k < m$); пусть $k < n + 1$.

Положим $b_i = f(i) = (i - x_1)(i - x_2)\ldots(i - x_k)$, где $x_l = i_l + \frac{1}{2}$ ($l = 1, 2, \ldots, k$). Функция f меняет знак в точках $x_1, x_2, \ldots, x_k$ и только в них, поэтому b_i и b_{i+1} имеют разные знаки тогда и только тогда, когда между ними существует некоторая точка $x_l = i_l + \frac{1}{2}$, т. е., если $i = i_l$ ($l = 1, 2, \ldots, k$). Мы получили, что в последовательностях $a_1, a_2, \ldots, a_m$ и $b_1, b_2, \ldots, b_m$ перемены знаков индексов происходят в одних и тех же парах индексов. Так как $a_m > 0$ и $b_m > 0$, то знаки a_i и b_i ($i = 1, 2, \ldots, m$) совпадают, т. е. $a_i > 0$ и $b_i > 0$, поэтому $\sum\limits_{i=1}^{m} a_i b_i > 0$, что противоречит равенству (1).

В13. Ответ: нет.

Заметим, что если a и b — два натуральных числа и $a > b$, то НОД$(a, b) \leqslant b$ и НОД$(a, b) \leqslant \frac{a}{2}$. Поэтому НОД$(a, b) \leqslant \frac{a+b}{3}$ при $a \neq b$. Складывая 12 таких неравенств, соответствующих 12 ребрам куба, получаем, что требуемое условиям задачи равенство возможно только тогда, когда для каждого ребра НОД$(a, b) = \frac{a+b}{3}$. Но в этом случае наибольшее из чисел a и b вдвое больше наименьшего. Пусть, скажем, $a = 2b$. Рассмотрим числа c и d, записанные на концах двух других ребер, выходящих из вершины, соответствующей числу a. Каждое из них должно быть вдвое больше или вдвое меньше числа a. Если хотя бы одно вдвое меньше, то оно равно b; если же оба вдвое больше — они равны между собой. Оба варианта противоречат условию, что и завершает доказательство.

B14. О т в е т: сможет тот сержант, который дежурит третьим.

Назовем *циклом* три дежурства, идущие подряд. Чтобы не попасть на гауптвахту, третий сержант будет в последний день каждого цикла давать наряды в точности тем солдатам, которые получили за предыдущие два дня ровно по одному наряду (из третьего пункта приказа следует, что такие солдаты найдутся). При такой стратегии по окончании каждого цикла у каждого солдата будет либо два наряда, либо ни одного, причем количество последних будет убывать. Значит, когда-то окажется, что все солдаты имеют по два наряда и на гауптвахту отправится первый сержант.

B15. Отрезок, лежащий в выпуклой фигуре F, называется *аффинным диаметром*, если существуют две параллельные прямые l_1 и l_2, проходящие через его концы, такие, что F содержится в полосе между прямыми l_1 и l_2 (рис. B11). Ясно, что если точка D лежит на отрезке AB и C — наиболее удаленная от AB вершина многоугольника P, то CD — аффинный диаметр. Покажем обратное, т. е. что любой аффинный диаметр многоугольника P является отрезком такого вида. Это очевидно, если один из концов аффинного диаметра лежит внутри стороны многоугольника. Пусть оба конца M и N диаметра — вершины многоугольника P. Из четырех углов α_1, α_2, α_3, α_4, которые образованы сторонами, выходящими из M и N (рис. B12), с прямыми l_1 и l_2, выберем наименьший. Повернем прямые l_1 и l_2 на этот угол, тогда одна из них будет направлена по стороне прямоугольника P и весь этот прямоугольник лежит между ними, т. е. пришли к предыдущему случаю.

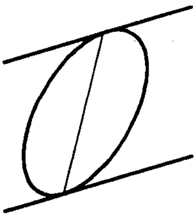

Рис. B11

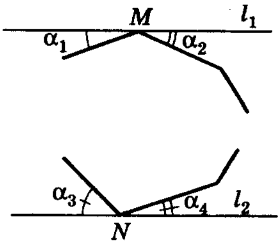

Рис. B12

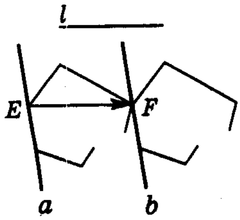

Рис. B13

Покажем теперь, что для любого направления l существует аффинный диаметр. Проведем в P все отрезки, параллельные этому направлению, и выберем самый длинный отрезок EF. Параллельный перенос на вектор $\overrightarrow{EF}$ переводит P в P' (рис. B13). Многоугольники P и P' не имеют общих внутренних точек, в противном случае в P нашелся бы отрезок, параллельный l и имеющий длину, бóльшую чем EF. Поэтому из выпуклости многоугольников P и P' следует, что через точку F можно провести прямую b так, что P и P' будут лежать по разные стороны от b (сумма углов многоугольников, выходящих из точки F, меньше 2π). Пусть a — прямая, полученная из b параллельным переносом на вектор $\overrightarrow{FE}$. Тогда P лежит по одну сторону от a, поскольку P' лежит по одну сторону от b. Итак, P лежит между a и b, т. е. EF — аффинный диаметр в направлении l.

По условию многоугольник P не имеет параллельных сторон, поэтому в P нет двух аффинных диаметров, одного и того же направления. Все направления пробегают угол от 0° до 180°, и мы установили взаимно однозначное соответствие между направлениями и отрезками, соединяющими точки на сторонах P с наиболее удаленными вершинами. Отсюда следует утверждение задачи.

B16. Ответ: да, может; например, записав числа $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, $1, 2, 5, 5^2, 5^4, 5^8, 5^{16}, 5^{32}$.

Лемма 1.

1. *Если $a > 4$ и $a > b$, то трехчлен $x^2 + ax + b$ имеет два различных действительных корня.*

2. *Если $a < 4$ и $b > 0$, то хотя бы один из трехчленов $x^2 + ax + b$, $x^2 + bx + a$ не имеет действительных корней.*

Доказательство.

Утверждение 1 очевидно, поскольку дискриминант $D = a^2 - 4b > 4a - 4b > 0$. Справедливость утверждения 2 также легко проверяется: если $b \leqslant a$, то $b^2 - 4a < 0$, а если $b > a$, то $a^2 - 4b < 0$.

Л е м м а 2. *Пусть $0 < a < b < c < d$ и оба трехчлена $x^2 + dx + a$ и $x^2 + cx + b$ имеют по два действительных корня. Тогда все четыре их корня попарно различны.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Допустим противное: эти трехчлены имеют общий корень x_0. Тогда $x_0^2 + dx_0 + a = 0 = x_0^2 + cx_0 + b$ и, следовательно, $x_0 = \dfrac{b - a}{d - c} > 0$. Но тогда $x_0^2 + dx_0 + a > 0$, т. е. приходим к противоречию.

Перейдем теперь к решению задачи. Покажем, что выбранные Знайкой 10 чисел подходят. Рассмотрим все Незнайкины числа, большие 4. Если их количество нечетно, то добавим к ним еще одно (любое) Незнайкино число. Назовем эти числа *отмеченными*.

Добавим к отмеченным числа из набора 5, 5^2, 5^4, 5^8, 5^{16}, 5^{32} так, чтобы общее количество отмеченных чисел было равно 12, а если степеней 5 не хватит, то добавим еще несколько любых Незнайкиных чисел. Из неиспользованных степеней 5 составим трехчлены $x^2 + px + q$, у которых $p < q$, тогда их дискриминанты отрицательны и, следовательно, они не имеют корней.

Запишем 12 отмеченных чисел в порядке возрастания: n_1, n_2, ..., n_{12}. Теперь составим из них 6 трехчленов: $x^2 + n_{12}x + n_1$, ..., $x^2 + n_7x + n_6$. По построению среди 12 отмеченных чисел не менее шести превосходят 4. Значит, согласно лемме 1 у каждого из этих трехчленов имеется по два различных действительных корня. В силу леммы 2 все эти корни попарно различны. Итак, имеем 12 попарно различных корней отмеченных трехчленов.

Составим трехчлен $x^2 + 2x + 1$. Его единственный корень равен -1. Если это число встречается среди корней отмеченных трехчленов, то назовем соответствующий трехчлен «плохим». Если же нет, то назовем «плохим» любой из отмеченных трехчленов. Выбираем «плохой» трехчлен, а из двух его коэффициентов и чисел $\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{4}$ составляем два трехчлена, не имеющие действительных корней (по лемме 1). Теперь различных действительных корней у составленных уже трехчленов ровно 11.

Возможно, остались неиспользованными несколько Незнайкиных чисел, из которых все, кроме, быть может, одного, меньше 4 (одно может быть равным 4). Составим из них трехчлены, не имеющие корней (согласно лемме 1). Итак, требуемая цель достигнута.

11 класс

В17. Ответ: нет.

Пусть $N = \overline{123...321}$ — m-значное симметричное число, полученное выписыванием чисел от 1 до n (очевидно, $m > 18$), A и B — соответственно числа, составленные из первых и последних k цифр числа N, $k = \left[\frac{m}{2}\right]$.

Тогда если 10^p — наибольшая степень десятки, полностью вошедшая в A, то $n < 2 \cdot 10^{p+1}$, т. е. число n имеет не более чем $p + 2$ знака. Кроме того, A содержит фрагмент $\underbrace{99...9}_{p}\underbrace{100...01}_{p}$, а значит, B содержит фрагмент

$\underbrace{100...0}_{p}\underbrace{199...9}_{p}$, что невозможно.

В18. Пусть n — число путников, которых обозначим буквами $P_1, P_2, ..., P_n$. Рассмотрим величину V_{ij} — скорость сближения P_i и P_j (для произвольных $1 \leqslant i, j \leqslant n$). Эта величина может быть как положительной, так и отрицательной (путники удаляются друг от друга). Заметим, что в течение всего рассматриваемого периода времени V_{ij} не возрастает (а уменьшиться может только один раз — в результате встречи P_i и P_j или обгона одного из них другим).

По условию задачи в конце рассмотренного периода времени сумма всех попарных скоростей положительна:

$$\sum_{1 \leqslant i,\, j \leqslant n} V_{ij} > 0.$$

Но $V_{ij} = V_{ji}$ (для любых $1 \leqslant i < j \leqslant n$), поэтому

$$\sum_{1 \leqslant i,\, j \leqslant n} V_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{1 \leqslant i,\, j \leqslant n} V_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} V_{ij} > 0.$$

Следовательно, обязательно найдется путник P_j такой, что

$$\sum_{i=1}^{n} V_{ij} > 0. \qquad (1)$$

Так как все V_{ij} не возрастали в течение всего периода времени, то и неравенство (1) выполнялось в течение всего периода времени, откуда и вытекает утверждение задачи.

B19. Предположим, что правильный $(n + 1)$-угольник $B_1...B_{n+1}$ является сечением пирамиды $SA_1...A_n$, где $A_1...A_n$ — правильный n-угольник. Рассмотрим три случая: $n = 5$, $n = 2k - 1$ $(k > 3)$ и $n = 2k$ $(k > 2)$. Так как n-угольная пирамида имеет $n + 1$ грань, то стороны сечения находятся по одной в каждой грани пирамиды. Поэтому без ограничения общности рассуждений можно считать, что точки $B_1, ..., B_{n+1}$ расположены на ребрах пирамиды так, как показано на рисунках B14 и B15 (в соответствии с указанными случаями).

1) Пусть $n = 5$. Так как в правильном шестиугольнике $B_1...B_6$ прямые B_2B_3, B_5B_6 и B_1B_4 параллельны, а плоскости A_2SA_3 и A_1SA_5 проходят через B_2B_3 и B_5B_6, то их линия пересечения ST ($T = A_1A_5 \cap A_2A_3$) параллельна этим прямым, т. е. $ST \parallel B_1B_4$. Проведем через прямые ST и B_1B_4 плоскость. Эта плоскость пересечет

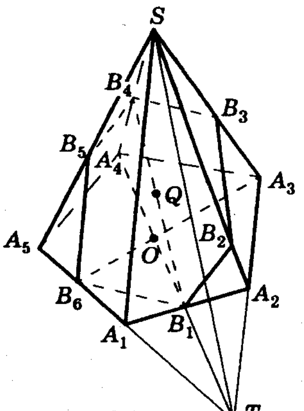

Рис. B14

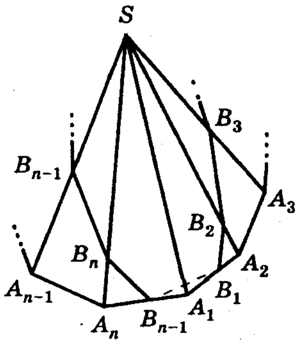

Рис. B15

плоскость основания пирамиды по прямой B_1B_4, которая должна проходить через точку пересечения прямой ST с плоскостью основания, т. е. через точку T. Итак, прямые A_1A_5, A_4B_1 и A_2A_3 пересекаются в одной точке. Аналогично доказывается, что прямые A_1A_2, A_3B_6 и A_4A_5 пересекаются в одной точке. Из этого следует, что A_4B_1 и A_3B_6 — оси симметрии правильного пятиугольника $A_1...A_5$, значит, точка O их пересечения — центр этого пятиугольника. Заметим теперь, что если Q — центр правильного шестиугольника $B_1...B_6$, то плоскости SA_3B_6, SA_4B_1 и SB_2B_5 пересекаются по прямой SQ. Значит, прямые A_3B_6, A_4B_1 и A_2A_5 должны пересекаться в одной точке — точке пересечения прямой SQ с плоскостью основания пирамиды. Отсюда следует, что диагональ A_2A_5 правильного пятиугольника $A_1...A_5$ должна проходить через его центр O, а это невозможно.

2) Пусть $n = 2k - 1$ ($k > 3$). Аналогично случаю 1 показывается, что так как в правильном $2k$-угольнике $B_1...B_{2k}$ прямые B_1B_2, $B_{k+1}B_{k+2}$ и B_kB_{k+3} параллельны, то прямые A_1A_2, $A_{k+1}A_{k+2}$ и A_kA_{k+3} должны пересекаться в одной точке, однако это невозможно, поскольку в правильном $(2k - 1)$-угольнике $A_1...A_{2k-1}$ прямые $A_{k+1}A_{k+2}$ и A_kA_{k+3} параллельны, а прямые A_1A_2 и $A_{k+1}A_{k+2}$ не параллельны.

3) Пусть $n = 2k$ ($k > 2$). Аналогично случаю 2 заключаем, что прямые A_1A_2, $A_{k+1}A_{k+2}$ и A_kA_{k+3} параллельны, следовательно, прямые B_1B_2, $B_{k+1}B_{k+2}$ и B_kB_{k+3} должны пересекаться в одной точке. Но это невозможно, так как $B_{k+1}B_{k+2} \parallel B_kB_{k+3}$, а прямые B_1B_2 и $B_{k+1}B_{k+2}$ не параллельны.

Замечания.

1. При $n = 3$ и $n = 4$ утверждение задачи неверно.

Примерами служат правильный тетраэдр, сечением которого может быть квадрат, и правильная четырехугольная пирамида, сечением которой может быть правильный пятиугольник.

2. Приведенное решение можно изложить короче, если воспользоваться центральным проектированием и его свойством, утверждающим, что при центральном проектировании образами прямых, проходящих через

одну точку (или параллельных), являются прямые, проходящие через одну точку (или параллельные). Достаточно спроектировать сечение пирамиды на плоскость основания, взяв в качестве центра проектирования вершину пирамиды.

B20. См. решение задачи **B12**.

B21. О т в е т: не существуют.

Предположим, что $a \geqslant b \geqslant c$ — числа, удовлетворяющие условиям задачи. Так как $a^2 - 1$ делится на b, числа a и b взаимно просты. Поэтому число $c^2 - 1$, которое по условию делится и на a и на b, должно делиться и на их произведение, откуда следует, что $c^2 - 1 \geqslant ab$. С другой стороны, $a \geqslant c$ и $b \geqslant c$, т. е. $ab \geqslant c^2$ — получили противоречие.

B22. Пусть O — центр окружности, описанной около треугольника ABC, K — точка пересечения прямых BO и CD (рис. B16 и B17). Из равенства острых углов BOE и DCA с перпендикулярными сторонами следует, что $\angle BOE = \angle KCE$ (CD — биссектриса) и, значит, точки K, O, E, C лежат на одной окружности (на рис. B16 $\angle KOE + \angle KCE = 180°$, на рис. B17 $\angle KOE = \angle KCE$, в случае совпадения точек K и O утверждение очевидно). Отсюда следует, что $\angle OKE = \angle OCE$ (углы опираются на одну дугу; рис. B16) либо $\angle OKE + \angle OCE = 180°$ (рис. B17). Но $\angle OCE = \angle OBE$, так как $OB = OC$, значит, $\angle BKE = \angle KBE$, т. е. $BE = KE$. Кроме того, $\angle BKE = \angle KBE =$

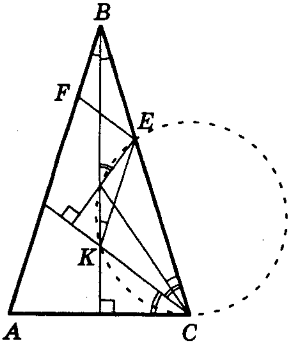

Рис. B16

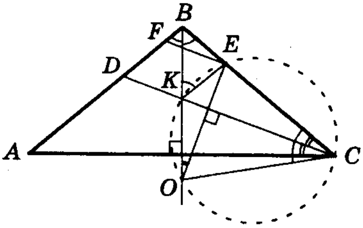

Рис. B17

$= \angle KBA$, поэтому $KE \parallel AB$, следовательно, $FEKD$ — параллелограмм и $DF = KE$. Итак, $DF = KE = BE$.

В23. Ответ: не существует.

Допустим противное: множество $M = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ удовлетворяет условию задачи. Пусть $m = \min\{|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_n|\}$, $M = \max\{|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_n|\}$; из условия следует, что $M \geqslant m > 0$. Рассмотрим многочлен

$$P(x) = b_k x^k + b_{k-1}x^{k-1} + \ldots + b_1 x + b_0,$$

все коэффициенты $b_0, b_1, \ldots, b_k$ и корни $x_1, x_2, \ldots, x_k$ которого принадлежат множеству M. Согласно теореме Виета

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_k = -\frac{b_{k-1}}{b_k},$$

$$x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots + x_1x_k + x_2x_3 + \ldots + x_{k-1}x_k = \frac{b_{k-2}}{b_k},$$

откуда

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_k^2 = \left(-\frac{b_{k-1}}{b_k}\right)^2 - 2\frac{b_{k-2}}{b_k}.$$

Тогда

$$km^2 \leqslant x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_k^2 = \frac{b_{k-1}^2}{b_k^2} - \frac{2b_{k-2}}{b_k} \leqslant \frac{M^2}{m^2} + 2\frac{M}{m},$$

т. е. $k \leqslant \dfrac{M^2}{m^4} + 2\dfrac{M}{m^3} = A$.

Так как степень многочлена не может быть больше A, то получили противоречие.

В24. Ответ: за 5 вопросов.

Для нахождения искомого порядка $a_1, a_2, \ldots, a_{100}$ расположения чисел в строке необходимо, чтобы каждая из пар (a_i, a_{i+1}), $i = 1, 2, \ldots, 99$ встречалась хотя бы в одном из наборов, о которых задают вопросы, в противном случае для двух последовательностей $a_1, \ldots, a_i, a_{i+1}, \ldots, a_{100}$ и $a_1, \ldots, a_{i+1}, a_i, \ldots, a_{100}$ все ответы будут одинаковы. Докажем, что после любых двух заданных вопросов может возникнуть ситуация, когда для охвата всех пар соседних чисел (еще неохваченных) потребуется задать еще не менее трех вопросов. Пусть $k_1, k_2, \ldots, k_{50}$ — порядок расположения чисел, про которые задан первый вопрос, $k_1, k_2, \ldots, k_{50}$ — порядок расположения чисел, про которые задан второй вопрос. Построим набор $a_1, a_2, \ldots, a_{100}$, для которого мы не сможем, задав еще два вопроса, однозначно установить порядок расположения в нем чисел. Рассмотрим ситуацию, когда все числа, названные в каждом из первых двух вопросов, оказались в ответах на одних и тех же местах.

В качестве искомого набора возьмем набор, у которого

$$k_i, k_j \in \{a_{2i-1}, a_{2i}\}, \; i = 1, 2, \ldots, 50,$$

и, кроме того, в каждой четверке

$$(a_{4m-3}, a_{4m-2}, a_{4m-1}, a_{4m}), \; m = 1, 2, \ldots, 25,$$

в первых двух вопросах не было сравнений соседних пар чисел из этой четверки. Покажем, что такой набор существует. Пусть X — множество чисел, не встречавшихся в первых двух вопросах. Возможны такие случаи:

1) $k_{2m-1} = k'_{2m-1}, k_{2m} = k'_{2m}$;

2) $k_{2m-1} = k'_{2m-1}, k_{2m} \neq k'_{2m}$;

3) $k_{2m-1} \neq k'_{2m-1}, k_{2m} \neq k'_{2m}$;

4) $k_{2m-1} \neq k'_{2m-1}, k_{2m} = k'_{2m}$.

Для этих случаев построим четверки $(a_{4m-3}, a_{4m-2}, a_{4m-1}, a_{4m})$ следующим образом:

1) $(k_{2m-1}, *, *, k_{2m})$;

2) $(k_{2m-1}, *, k_{2m}, k'_{2m})$;

3) $(k_{2m-1}, k'_{2m-1}, k_{2m}, k'_{2m})$;

4) $(k_{2m-1}, k'_{2m-1}, *, k_{2m})$,

где в качестве * можно взять любое из чисел множества X, не встречающееся при построении предыдущих четверок.

Тем самым показано, что после двух вопросов возможна (независимо от желания спрашивающего) ситуация, когда ни одна из пар (a_i, a_{i+1}) при i, не кратном 4, не охвачена. Каждое из 100 чисел входит при этом хотя бы в одну неохваченную пару и, следовательно, должно фигурировать по крайней мере в одном из последующих вопросов.

Допустим, что в данной ситуации за два вопроса можно охватить все неохваченные пары; тогда каждое из 100 чисел должно фигурировать ровно в одном из таких вопросов. Рассмотрев четверки вида $(a_{4i-3}, a_{4i-2}, a_{4i-1}, a_{4i})$, $i = 1, 2, \ldots, 25$, заметим, что если одно из чисел такой четверки будет фигурировать в некотором вопросе, то и остальные три должны фигурировать в этом вопросе (иначе не все пары соседних чисел в этой четверке будут охвачены). Но тогда количество чисел в наборе, о котором задается вопрос, должно делиться на 4. Так как 50 не делится на 4, то получаем противоречие.

Итак, за 4 вопроса наверняка определить расположение чисел 1, 2, ..., 100 в строке нельзя. Покажем, как сделать это за 5 вопросов. Первый вопрос задаем про набор $M_1 = \{1, 2, \ldots, 50\}$, второй — про набор $M_2 = \{51, 52, \ldots, 100\}$. Набор M_3 будет состоять из 25 самых левых чисел набора M_1 и 25 самых левых чисел набора M_2, а набор M_4 — из 25 самых правых чисел набора M_1 и 25 самых правых набора M_2. Ответ на вопрос о наборе M_3 определит, очевидно, числа $a_1, a_2, \ldots, a_{25}$, а о наборе M_4 — числа $a_{76}, a_{77}, \ldots, a_{100}$. Пятым вопросом определяем расположение остальных 50 чисел в искомой строке.

Олимпиада 1997 г.

9 класс

В25. Пусть $P(x) = ax^2 + bx + c$. Тогда

$$(P(xy))^2 - P(x^2)P(y^2) =$$
$$= (ax^2y^2 + bxy + c)^2 - (ax^4 + bx^2 + c)(ay^4 + by^2 + c) =$$
$$= a^2x^4y^4 + b^2x^2y^2 + c^2 + 2abx^3y^3 + 2acx^2y^2 + 2bcxy -$$
$$- a^2x^4y^4 - b^2x^2y^2 - c^2 - abx^2y^2(x^2 + y^2) - ac(x^4 + y^4) -$$
$$- bc(x^2 + y^2) = abx^2y^2(2xy - x^2 - y^2) + ac(2x^2y^2 - x^4 -$$
$$- y^4) + bc(2xy - x^2 - y^2) = -abx^2y^2(x - y)^2 -$$
$$- ac(x^2 - y^2)^2 - bc(x - y)^2.$$

При $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, $c \geqslant 0$ все три слагаемых в последнем выражении неположительны, откуда и следует неравенство $(P(xy))^2 \leqslant P(x^2)P(y^2)$.

З а м е ч а н и е. Утверждение задачи остается справедливым для произвольного многочлена с неотрицательными коэффициентами.

B26. Пусть O — центр поворота, R — наибольшее из расстояний от точки O до вершин многоугольника, A_1 — одна из вершин такая, что $OA_1 = R$. Если A_1 переходит при повороте в вершину A_2, A_2 — в A_3, A_3 — в A_4, то, очевидно, $A_1A_2A_3A_4$ — квадрат с центром в точке O.

Обозначим через r наименьшее из расстояний от O до вершин многоугольника, тогда $r > \frac{R}{\sqrt{2}}$. В самом деле, из выпуклости многоугольника следует, что и любые пять его вершин определяют выпуклый многоугольник. Поэтому внутри и на границе квадрата $A_1A_2A_3A_4$ нет (кроме A_1, A_2, A_3 и A_4) вершин многоугольника, откуда и следует неравенство $r > \frac{R}{\sqrt{2}}$. Теперь в качестве кругов, удовлетворяющих условию, можно взять любые два круга с центром O, радиусы r_1 и R_1 которых таковы, что $\frac{R}{\sqrt{2}} < r_1 < r$ и $R_1 = r_1\sqrt{2}$.

З а м е ч а н и е. Справедливо следующее утверждение: если выпуклый многоугольник M переходит в себя при повороте на угол α ($\alpha < 180°$), то найдутся два круга с отношением радиусов, равным 2, один из которых содержит M, а другой содержится в M.

B27. Для удобства вместо боковой поверхности параллелепипеда $a \times b \times c$ рассмотрим боковую поверхность цилиндра с высотой c и длиной окружности основания $2(a + b)$, разбитую на единичные «квадраты» линиями, параллельными окружностям оснований и образующими. (Для того чтобы превратить «квадраты» в квадраты, их следует разогнуть.)

Проведем плоскость через ось симметрии цилиндра и через центры единичных «квадратов» в каком-нибудь столбце S ширины 1 и высоты c на поверхности цилиндра. Докажем, что никакая оклейка прямоугольниками, состоящими из четного числа единичных квадратов, удовлетворяющая условию задачи, не симметрична относительно этой плоскости. Действительно, в противном случае столбец S оказался бы покрыт прямоугольниками нечетной ширины. Площадь каждого из этих прямоугольников четна, а это противоречит нечетности высоты столбца S.

Итак, все способы оклейки можно разбить на пары переходящих друг в друга оклеек (при симметрии относительно указанной плоскости), значит, их число четно.

В28. Ответ: всем, кроме, быть может, одного.

Ясно, что мудрец, стоящий в колонне последним, может спастись только случайно, ведь его колпака не видит никто из мудрецов. Но он может спасти всех остальных, сообщив им четность числа белых колпаков, надетых на них (по договоренности он скажет «белый», если это число нечетно, и «черный» в противном случае). Теперь мудрецы должны вычислять и называть цвета своих колпаков по порядку от предпоследнего к первому: сначала предпоследний, видя колпаки впереди стоящих и зная четность числа белых колпаков (своего плюс колпаков впереди стоящих), легко определит цвет своего колпака и назовет его; затем мудрец, стоящий перед ним, зная цвета всех тех же колпаков, кроме своего (передний он видит, а про задний только что услышал), по четности может определить цвет своего колпака и назвать его. Остается продолжать описанную процедуру до тех пор, пока первый мудрец не определит цвет своего колпака.

В29. Ответ: нет.

Допустим противное: такие b и c нашлись. Тогда, если k и l — корни уравнения $x^2 + bx + c = 0$, а m и n — корни уравнения $2x^2 + (b + 1)x + c + 1 = 0$, то по теореме Виета

$$k + l = -b, \qquad (1)$$
$$kl = c, \qquad (2)$$
$$2(m + n) = -b - 1, \qquad (3)$$
$$2mn = c + 1. \qquad (4)$$

Из (4) видно, что c — целое нечетное число. Поэтому числа k и l оба нечетные, а сумма их (равная $-b$) — целое четное число. Но тогда число $(-b - 1)$ нечетно и равенство (3) невозможно. Из полученного противоречия вытекает, что таких чисел b и c не существует.

В30. Объединим учеников в группы по фамилиям и в группы по именам (возможны группы, состоящие из одного человека, — например, ученик, не имеющий однофамильцев). Каждый войдет в две группы — по фамилии и по имени. Из условия задачи следует, что в классе ровно 11 групп. Действительно, есть группы, состоящие из 1, 2, ..., 11 человек, поэтому групп не меньше 11, но $1 + 2 + ... + 11 = 66 = 2 \cdot 33$, т. е. мы уже сосчитали каждого ученика дважды, значит, больше групп нет.

Рассмотрим группу из 11 человек (скажем, однофамильцев). Остальных групп и, в частности, групп тёзок не более десяти. Поэтому какие-то двое из 11 входят в одну группу тёзок, т. е. у них одинаковы и имя, и фамилия.

В31. Пусть прямая AD и AE пересекают прямую BC в точках F и H соответственно (рис. В18). Достаточно доказать, что DE — средняя линия треугольника AFH. Треугольник MBN равнобедренный ($BM = BN$) и $MN \parallel AH$, поэтому $AMNH$ — равнобедренная трапеция, т. е. $NH = AM$. Аналогично доказывается, что $FN = AK$. Так как $AK = AM$, то из полученных равенств следует, что $FN = NH$, т. е. N — середина FH. Тогда D — середина AF, а E — середина AH.

В32. О т в е т: 106.

Пример расстановки, для которой $S = 106$, приведен на рисунке В19.

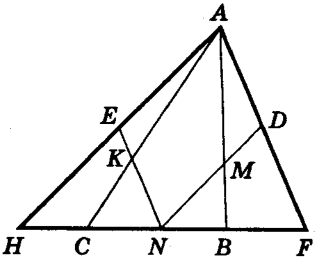

Рис. В18

46	55	47	54	48	53	49	52	50	51
60	41	59	42	58	43	57	44	56	45
36	65	37	64	38	63	39	62	40	61
70	31	69	32	68	33	67	34	66	35
26	75	27	74	28	73	29	72	30	71
80	21	79	22	78	23	77	24	76	25
16	85	17	84	18	83	19	82	20	81
90	11	89	12	88	13	87	14	86	15
6	95	7	94	8	93	9	92	10	91
100	1	99	2	98	3	97	4	96	5

Рис. В19

Докажем теперь, что $S \geqslant 106$ для любой расстановки чисел в таблице. Нам понадобится следующая лемма.

Л е м м а. *Если в прямоугольнике 2×10 отмечено $n \leqslant 9$ попарно несоседних клеток, то число неотмеченных клеток прямоугольника, соседних с отмеченными, больше n.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. В каждом из 10 малых прямоугольников 1×2, длинные стороны которых параллельны коротким сторонам прямоугольника 2×10, отмечено не более одной клетки. Если одна клетка в таком малом прямоугольнике отмечена, то другая — неотмеченная, соседняя с отмеченной. Тем самым уже имеем n таких клеток. Так как $n \leqslant 9$, то (при $n \geqslant 1$) найдется, очевидно, и клетка, принадлежащая малому прямоугольнику 1×2 без отмеченных клеток, граничащая с отмеченной клеткой соседнего малого прямоугольника 1×2. Следовательно, общее число неотмеченных клеток, соседних с отмеченными, больше n. Лемма доказана.

Допустим, что $S \leqslant 105$ для некоторой расстановки чисел. Стерев все числа в таблице, будем списывать их на прежние места, начиная с числа 100 в порядке убывания.

Выделим в таблице пять неперекрывающихся горизонтальных полос 10×2 клетки и пять неперекрывающихся вертикальных полос 2×10 клеток. Зафиксируем число n_0, после вписывания которого впервые либо в каждой горизонтальной, либо в каждой вертикальной полосе окажется не меньше одного вписанного числа; соответствующий момент назовем *критическим*. Пусть уже вписаны 33 числа от 100 до 68, но есть пустые горизонтальная и вертикальная полосы. Те 64 клетки таблицы, которые не входят в эти полосы, можно разбить на 32 малых прямоугольника 1×2, хотя бы в одном из них окажутся два вписанных числа с суммой, не меньшей чем $68 + 69 > 105$. Отсюда следует, что $n_0 \geqslant 68$.

Заметим, что в критический момент в каждую из полос вписано меньше 10 чисел (если бы нашлась, например, горизонтальная полоса, в которую вписано ровно 10 чисел, то перед вписыванием числа n_0 в ней было бы не меньше 9 чисел, в силу чего в каждой из вертикальных полос было бы минимум по одному числу, что противоречит определению числа n_0). Поэтому к полосам того направления, в которых в критический момент оказалось хотя бы по одному числу, можно применить сформулированную выше лемму.

Поскольку в критический момент в таблице вписано $101 - n_0$ чисел, из леммы следует, что у клеток, куда они вписаны, есть не менее $(101 - n_0) + 5 = 106 - n_0$ пустых соседних. Таким образом, нам предстоит вписать в таблицу число, которое не меньше, чем $106 - n_0$, причем рядом с числом, которое не меньше, чем n_0. Сумма этих двух чисел будет не меньше, чем $106 - n_0 + n_0 = 106$, а это противоречит предположению о том, что $S \leqslant 105$.

10 класс

В33. Ответ: $(\pm 1; 0)$; $(\pm 4; 3)$; $(\pm 4; 5)$.

Правая часть равенства неотрицательна, так как равна квадрату числа, следовательно, $y \geqslant 0$, откуда левая часть не меньше $(2y - 1)^2$, так как модуль разности y^2 и любого квадрата целого числа (если $y \geqslant 0$ и квадраты различны) не меньше $(2y - 1)$. Имеем $(2y - 1)^2 \leqslant 1 + 16y$, откуда $y \leqslant 5$. Итак, правая часть может принимать значения 1, 17, 33, 49, 65, 81, из них квадратами являются только 1, 49, 81.

Рассмотрим три случая:

1) $\begin{cases} y = 0, \\ (x^2)^2 = 1, \end{cases}$ откуда $\begin{cases} x = \pm 1, \\ y = 0. \end{cases}$

2) $\begin{cases} y = 3, \\ (x^2 - 9)^2 = 49, \end{cases}$ откуда $\begin{cases} y = 3, \\ \left[\begin{array}{l} x^2 = 16, \\ x^2 = 2, \end{array}\right. \end{cases}$ т. е. $\begin{cases} x = \pm 4, \\ y = 3. \end{cases}$

3) $\begin{cases} y = 5, \\ (x^2 - 25)^2 = 81, \end{cases}$ откуда $\begin{cases} y = 5, \\ \left[\begin{array}{l} x^2 = 34, \\ x^2 = 16, \end{array}\right. \end{cases}$ т. е. $\begin{cases} x = \pm 4, \\ y = 5. \end{cases}$

В34. Докажем утверждение от противного. Пусть верх квадрата склеен с низом. Возьмем раскраску, противоречащую условию. Будем называть *весом* линии количество черных клеток на ней. Пусть имеется горизонталь веса n. Тогда n вертикалей и n диагоналей каждого направления должны иметь веса 1, 2, ..., n, так как все они пересекают эту горизонталь. Тогда и n горизонталей имеют веса 1, 2, ..., n, так как все они пересекают вертикаль веса n.

Переставим циклически горизонтали так, чтобы нижняя имела вес n (свойства раскраски при этом не изменятся). Пронумеруем горизонтали снизу вверх от 0 до $n - 1$, а вертикали — от 0 до $n - 1$, начиная с вертикали веса n.

Каждая диагональ пересекает по разу горизонталь и вертикаль веса n, поэтому диагонали веса 1 должны проходить через клетку их пересечения — клетку (0, 0). Итак, все клетки (i, i) и $(n - i, i)$, $i > 0$ — пустые.

Если n нечетно, то в каждом столбце, кроме 0, получаем не менее двух пустых клеток и столбца веса $n - 1$ не найдется.

Если $n = 2m$, то столбец m и строка m должны иметь вес $m - 1$ (в них закрашены все клетки, кроме (m, m)). Но тогда мы не сможем найти столбца веса 1.

Если с самого начала отсутствует горизонталь веса n, то имеется горизонталь веса 0, и мы можем провести те же рассуждения, поменяв ролями закрашенные и незакрашенные клетки.

В35. Пусть N_1 — точка, симметричная точке N относительно K (рис. В20). Тогда $\Delta KCN_1 = \Delta KDN$, поэтому $CN_1 = ND$ и $\angle N_1CK = \angle NDK = \pi - \angle ABN$. Заметим еще, что $\angle MCK = \pi - \angle ABM$. Складывая полученные равенства, имеем $\angle N_1CM = \angle MBN$. Кроме того, из условия следует, что $CM = MB$ и $BN = ND$ (т. е. и $BN = CN_1$). Значит, $\Delta MCN_1 = \Delta MBN$, откуда $MN_1 = MN$. Отрезок MK — медиана в равнобедренном треугольнике MNN_1, поэтому $\angle MKN = 90°$.

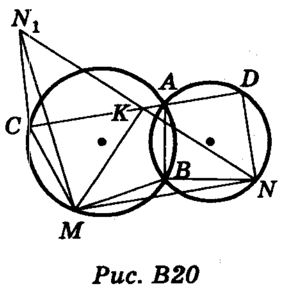

Рис. В20

Замечание. Задача имеет много других решений. Например, можно воспользоваться подобием треугольников MEK и

KFN, где E и F — середины отрезков BC и BD соответственно. Эти треугольники имеют две пары взаимно перпендикулярных сторон: EK и FN, ME и KF; следовательно, перпендикулярны и их третьи стороны.

Кроме того, соображения, использующие композицию поворотов, позволяют отказаться от дополнительного условия в задаче (о том, что точки C и D лежат по разные стороны от A), которое было задано лишь затем, чтобы избежать разбора различных случаев. Действительно, рассмотрим композицию поворотов $R_M^\beta \cdot R_N^\alpha$, где $\alpha = \angle DNB$, $\beta = \angle BMC$ (углы предполагаются ориентированными). Заметим, что $\alpha + \beta = 180°$, поэтому $R_M^\beta \cdot R_N^\alpha = Z_x$ — центральная симметрия относительно некоторой точки X. Но

$$Z_x(D) = (R_M^\beta \cdot R_N^\alpha)(D) = R_M^\beta(B) = C,$$

поэтому X — середина отрезка CD, т. е. точка K. Если $N_1 = Z_k(N)$, то $N_1 = (R_M^\beta \cdot R_N^\alpha)(N) = R_M^\beta(N)$, т. е. треугольник NMN_1 равнобедренный и $\angle MKN = 90°$.

В36. Лемма. *Если $2k$-угольник можно разбить на прямоугольники, то его можно разбить на не более чем $k - 1$ прямоугольник.*

Доказательство. Сумма углов многоугольника $S = (2k - 2) \cdot 180°$, и все углы в нем, очевидно, содержат $90°$ или $270°$. Если все углы равны $90°$, то это прямоугольник. Пусть найдется угол A в $270°$. Продолжим одну из его сторон внутрь многоугольника до пересечения с контуром. Многоугольник разобьется на две части, причем сумма внутренних углов частей не превосходит суммы внутренних углов многоугольника (продолжение стороны отрезает от угла A угол в $90°$, который попадает в одну из частей, и угол в $180°$, который лежит на стороне другой части, поэтому исчезает, в то же время дополнительно в этих частях могут возникнуть только два угла по $90°$ там, где продолжение стороны дошло до контура многоугольника). Заметим, что общее количество углов в $270°$ уменьшилось. Если они еще остались, то будем повторять операцию с частями. В конце мы получим n частей без углов $270°$, т. е. n прямоугольников с общей суммой углов $S = 360°n \leqslant (2k - 2) \cdot 180°$, откуда $n \leqslant k - 1$. Лемма доказана.

Из леммы следует, что в этом многоугольнике число вершин больше 200, иначе его можно разбить на 99 прямоугольников. Разобьем его на m треугольников и рассмотрим сумму из углов: $S = 180°m$. Найдем теперь S, учитывая, что углы треугольников входят в состав углов многоугольника. Каждый угол многоугольника дает вклад не менее 90° (из угла 270° может быть вычтено 180°, если его вершина лежит на стороне какого-нибудь треугольника), поэтому $S = 180°m > 200 \cdot 90°$, откуда $m > 100$, что и требовалось доказать.

Замечание. Оценка в задаче является точной: объединение клеток квадрата 100×100, кроме клеток, лежащих выше главной диагонали, дает пример многоугольника, который главной диагональю разбивается на 101 треугольник.

В37. Ответ: не существует.

Предположим противное. Если многочлен $kx^2 + lx + m$ с целыми коэффициентами имеет два целых корня x_1 и x_2, то m и l делятся на k, поскольку $x_1x_2 = \frac{m}{k}$, а $x_1 + x_2 = -\frac{l}{k}$.

Из чисел a и $a + 1$ одно четное. Не умаляя общности, можно считать, что четное — это a. Тогда b и c также четные, а значит, $(b + 1)$ и $(c + 1)$ — нечетные. Пусть y_1 и y_2 — целые корни трехчлена $(a + 1)x^2 + (b + 1)x + (c + 1)$. Отсюда следует, что $y_1y_2 = \frac{c+1}{a+1}$ и $y_1 + y_2 = -\frac{b+1}{a+1}$ — нечетные числа. Получили противоречие: сумма и произведение двух целых чисел не могут одновременно быть нечетными.

В38. I способ. Пусть L — точка пересечения прямых KO и MN, а прямая, проходящая через L параллельно AC, пересекает AB и BC в точках A_1 и C_1 соответственно (рис. В21).

Покажем, что $A_1L = LC_1$. Действительно, $\angle BA_1L = \angle MOL$ как острые углы с соответственно перпендикулярными сторонами. Значит, четырехугольник A_1MLO — вписанный и $\angle MLA_1 = \angle MOA_1 = \alpha$. Аналогично, $\angle C_1LN = \angle C_1ON = \alpha$. Тогда $\Delta OMA_1 = \Delta OC_1N$, откуда $OA_1 = OC_1$.

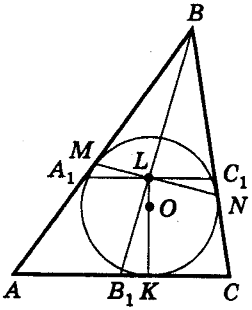

Рис. B21

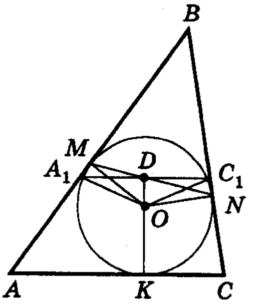

Рис. B22

Поэтому треугольник A_1OC_1 — равнобедренный, его высота OK является и медианой. Итак, $A_1L = LC_1$. Но тогда точка L, очевидно, лежит на медиане BB_1, т. е. L совпадает с D из условия задачи.

II способ. Проведем через точку D отрезок C_1A_1 с концами на AB и BC параллельно AC (рис. B22). Тогда $C_1D = DA_1$, так как по условию D лежит на медиане угла B.

Заметим, что $\angle MDC_1 = \angle A_1DN$ как вертикальные и $\angle C_1MD = 180° - \angle BMD = 180° - \angle A_1ND$ $(BM = BN)$ как касательные, проведенные из одной точки. Отсюда

$$\frac{S_{\Delta DMC_1}}{S_{\Delta DNA_1}} = \frac{\frac{1}{2}\cdot MD\cdot C_1D\cdot \sin\angle MDC_1}{\frac{1}{2}\cdot ND\cdot A_1D\cdot \sin\angle NDA_1} = \frac{MD}{ND}.$$

Кроме того,

$$\frac{S_{\Delta DMC_1}}{S_{\Delta DNA_1}} = \frac{\frac{1}{2}\cdot MD\cdot MC_1\cdot \sin\angle C_1MD}{\frac{1}{2}\cdot ND\cdot NA_1\cdot \sin\angle A_1ND} = \frac{MD}{ND}\cdot\frac{MC_1}{NA_1},$$

т. е. $MC_1 = NA_1$. Следовательно, $\Delta\, OMC_1 = \Delta\, ONA_1$ (так как $OM = ON$). Отсюда $OC_1 = OA_1$, поэтому OD — высота треугольника OA_1C_1. Таким образом, $OD \perp AC$ $(A_1C_1 \parallel AC)$, но и $OK \perp AC$, значит, O лежит на DK.

B39. Ответ: $m = n = l = 2$.

Положим $d = \text{НОД}(m, n, l)$. Пусть $m = dm_1$, $n = dn_1$, $l = dl_1$. Тогда $d(m_1 + n_1) = d^2 d_{mn}^2$, где $d_{mn} = \text{НОД}(m_1, n_1)$;

откуда $m_1 + n_1 = d \cdot d_{mn}^2$. Складывая это равенство с двумя аналогичными, получаем

$$2(m_1 + n_1 + l_1) = d(d_{mn}^2 + d_{ml}^2 + d_{nl}^2). \qquad (1)$$

Покажем, что d взаимно просто с суммой $m_1 + n_1 + l_1$. В самом деле, если у d и этой суммы есть общий делитель $d_1 > 1$, то он будет общим делителем всех чисел m_1, n_1 и l_1 (так как сумма любых двух из них делится на d). Но тогда произведение $d \cdot d_1$ — общий делитель чисел m, n и l, что противоречит определению числа d. Следовательно, d является делителем числа 2 (равенство (1)), откуда $d \leqslant 2$. Заметим, что числа d_{mn}, d_{nl}, d_{ml} попарно взаимно просты (иначе у чисел m_1, n_1, l_1 нашелся бы общий делитель, не равный 1). Поэтому $m_1 = d_{mn} \cdot d_{ml} \cdot m_2$, $n_1 = d_{mn} \cdot d_{nl} \cdot n_2$, $l_1 = d_{nl} \cdot d_{ml} \cdot l_2$, где m_2, n_2, l_2 — натуральные числа. В таких обозначениях первое из исходных уравнений примет вид

$$d_{mn} \cdot d_{ml} \cdot m_2 + d_{mn} \cdot d_{nl} \cdot n_2 = d \cdot d_{mn}^2,$$

т. е.

$$d_{ml} \cdot m_2 + d_{nl} \cdot n_2 = d \cdot d_{mn}.$$

Не умаляя общности, мы можем считать, что d_{mn} — наименьшее из чисел d_{mn}, d_{ml} и d_{nl}. Имеем:

$$d_{ml} \cdot m_2 + d_{nl} \cdot n_2 \geqslant d_{ml} + d_{nl} \geqslant 2d_{mn} \geqslant d \cdot d_{mn}$$

(так как $d \leqslant 2$). Итак, все неравенства являются на самом деле равенствами, отсюда $m_2 = n_2 = 1$, $d = 2$ и $d_{ml} = d_{mn} = d_{nl}$. Но числа d_{ml}, d_{mn}, d_{nl} попарно взаимно просты, следовательно, они равны 1 и мы нашли единственное решение $m = n = l = 2$.

В40. Обозначим через (a_i) количество камней в клетке с номером i. Тогда последовательность $A = (a_i)$ задает конфигурацию — расположение камней по клеткам. Пусть α — корень уравнения $x^2 = x + 1$, больший 1. Назовем *весом* конфигурации A число $\omega(A) = \Sigma\, a_i\alpha^i$. Покажем, что разрешенные действия не меняют веса. Действительно,

$$\alpha^{n+1} - \alpha^n - \alpha^{n-1} = \alpha^{n-1}(\alpha^2 - \alpha - 1) = 0,$$
$$\alpha^{n+1} - 2\alpha^n + \alpha^{n-2} = \alpha^{n-2}(\alpha - 1)(\alpha^2 - \alpha - 1) = 0.$$

Докажем индукцией по числу камней k, что любая последовательность действий завершается. При $k = 1$ это верно. Пусть k — наименьшее число, при котором для какой-то конфигурации $A = (a_i)$ с $\Sigma a_i = k$ есть бесконечная последовательность действий. Наибольший номер непустой клетки при разрешенных действиях не уменьшается, но и расти бесконечно он не может — он не может превысить числа n, при котором $\alpha^n > \omega(A)$. Значит, с какого-то момента наибольший номер непустой клетки перестает изменяться и с камнями, попавшими в эту клетку, уже ничего не происходит. Выбросим эти камни и применим предположение индукции к оставшимся.

В конечной конфигурации в каждой клетке не более одного камня и нет двух непустых клеток подряд. Докажем, что любые две конфигурации $A = (a_i)$ и $B = (b_i)$ с такими свойствами имеют разные веса. Пусть n — наибольший номер, при котором $a_i \neq b_i$; пусть $a_n = 1$, $b_n = 0$. Выбросим из A и B все камни с номерами, большими n (они в A и B совпадают). Для оставшихся конфигураций A' и B' имеем:

$$\omega(A') \geqslant \alpha^n;$$

$$\omega(B') < \alpha^{n-1} + \alpha^{n-3} + \alpha^{n-5} + \ldots = \alpha^{n-1} \frac{1}{1 - \alpha^{-2}} = \alpha^n.$$

11 класс

B41. См. решение задачи **B33**.

B42. Ответ: 99 мудрецам.

Все 100 мудрецов гарантированно спастись не могут, поскольку цвет колпака последнего мудреца никто из них не видит.

Покажем, как можно спасти 99 мудрецов. Белому, синему и красному цветам сопоставим числа 0, 1 и 2 соответственно. В первую минуту мудрец, стоящий позади всех, должен выкрикнуть цвет, соответствующий остатку от деления на 3 суммы всех чисел, сопоставленных цветам колпаков мудрецов, стоящих впереди. Тогда мудрец, стоящий непосредственно перед ним, сможет вычислить цвет своего колпака, так как видит колпаки всех 98 мудрецов, стоящих впереди; этот цвет он и должен выкрикнуть во вторую минуту. В третью минуту мудрец, стоящий в колонне 98-м, вычисляет, основываясь на информации, полученной из двух предыдущих выкриков и видя колпаки 97 стоящих впереди, цвет своего колпака, выкрикивает его и т. д.

В43. См. решение задачи **В35.**

В44. Пусть PQ — любое горизонтальное ребро одного из кубиков. Обозначим через C_{PQ} вертикально расположенный прямоугольник, нижняя сторона которого есть PQ, а верхняя лежит на поверхности куба. Пусть n_{PQ} — число пересечений данной ломаной с прямоугольником C_{PQ}. Ребро PQ покрасим в белый цвет, если n_{PQ} четно, и в черный, если n_{PQ} нечетно. Все остальные, т. е. вертикальные ребра кубиков, покрасим в белый цвет.

Докажем теперь, что приведенная раскраска удовлетворяет условию задачи. Пусть $PQRS$ — вертикальная грань и PQ и RS — ее горизонтальные ребра. Если ломаная не пересекает $PQRS$, то прямоугольники C_{PQ} и C_{RS} пересекаются с ломаной в одних и тех же точках. Поэтому ребра PQ и RS покрашены в один цвет, и, следовательно, эта грань удовлетворяет требованию задачи. Если же ломаная пересекает прямоугольник $PQRS$, то n_{PQ} и n_{RS} отличаются на 1 и, следовательно, имеют разную четность. Поэтому ребра PQ и RS покрашены в разные цвета, что означает выполнение условия задачи и в этом случае.

Пусть теперь $PQRS$ — горизонтальная грань. Объединение прямоугольников C_{PQ}, C_{QR}, C_{RS} и C_{SP} есть боковая поверхность параллелепипеда, состоящего из кубиков, расположенных в точности над гранью $PQRS$. Замкнутая ломаная пересекает поверхность параллелепипеда четное число раз (сколько раз ломаная «заходит» внутрь параллелепипеда, столько раз она и «выходит» из него).

Заметим, что ломаная не пересекает верхнюю грань параллелепипеда. Если грань $PQRS$ не отмечена, то ломаная не пересекает ее. Тогда все точки пересечения ломаной с поверхностью параллелепипеда расположены на его боковой поверхности. В этом случае сумма $n_{PQ} + n_{QR} + n_{RS} + n_{SP}$ четна. Поэтому число сторон грани $PQRS$, отмеченных черным цветом, четно. Если же грань $PQRS$

отмечена, то одна из точек пересечения ломаной с поверхностью параллелепипеда принадлежит $PQRS$. Тогда сумма $n_{PQ} + n_{QR} + n_{RS} + n_{SP}$ нечетна и, следовательно, нечетное число сторон грани $PQRS$ окрашено в черный цвет.

В45. Ответ: трехчленов, не имеющих действительных корней, больше.

Из теоремы Виета следует, что все корни трехчлена $x^2 + px + q$ при фиксированном q разбиваются на пары $x_1 \leqslant x_2 < 0$, $x_1 \cdot x_2 = q$. Отсюда $-\sqrt{q} \leqslant x_2 < 0$, поэтому число таких пар с целыми x_1 и x_2 не превосходит $[\sqrt{q}]$ (где через $[q]$ обозначено наибольшее целое число, не превосходящее q). С другой стороны, при фиксированном q не имеют корней все трехчлены, для которых $D = p^2 - 4q < 0$, т. е. $p < 2\sqrt{q}$. Количество таких трехчленов не менее $[2\sqrt{q}] - 1$.

Итак, для каждого q от 2 до 1997 трехчленов, имеющих целые корни, меньше чем трехчленов, не имеющих действительных корней, а при $q = 1$ имеется по одному трехчлену каждого типа.

В46. Для каждой из вершин многоугольника, лежащих по одну сторону от l, отметим отрезок, высекаемый на l продолжениями выходящих из нее сторон. Тогда условие задачи означает, что точка P лежит внутри многоугольника тогда и только тогда, когда она принадлежит нечетному числу отмеченных отрезков. Но каждая из точек пересечения l со сторонами многоугольника является концом ровно одного из отмеченных отрезков, а каждая из точек пересечения l с продолжением стороны многоугольника — концом ровно двух отмеченных отрезков. Следовательно, при движении точки P по прямой l четность количества содержащих ее отмеченных отрезков изменяется при каждом пересечении границы многоугольника. Отсюда и следует утверждение задачи.

В47. I способ. Пусть O — центр сферы, O_1 — точка пересечения биссектрис треугольника ABC, H —

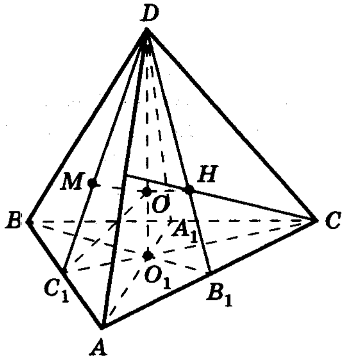

Рис. В23

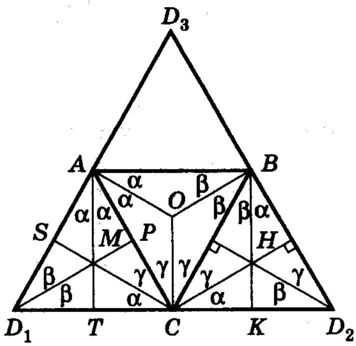

Рис. В24

ортоцентр треугольника ACD, M — точка пересечения медиан ABD и O_1, H, M — точки касания (рис. В23).

Точка O_1 — центр окружности, вписанной в треугольник ABC. Пусть эта окружность касается сторон BC, CA и AB в точках A_1, B_1, C_1 соответственно. Тогда $O_1A_1 = O_1B_1 = O_1C_1$, следовательно, прямоугольные треугольники OO_1A_1, OO_1B_1, OO_1C_1 равны, откуда $\angle OA_1O_1 = \angle OB_1O_1 = \angle OC_1O_1 = \varphi$. Кроме того, $O_1A_1 \perp BC$, значит, по теореме о трех перпендикулярах $OA_1 \perp BC$, т. е. φ — линейный угол двугранного угла с гранями BOC и BO_1C. С другой стороны, BOC — биссектор двугранного угла с гранями BDC и BAC (O — центр вписанной сферы), поэтому угол между гранями BDC и ABC равен 2φ. Отсюда следует, что проекция O' точки D на плоскость ABC равноудалена от AB, BC и CA, так как точки O' и C лежат по одну сторону от AB, O' и B — от AC, O' и A — от BC, то $O' = O_1$, т. е. DO_1 — высота тетраэдра.

Поскольку $AB \perp O_1C_1$ и $AB \perp DO_1$, имеем $AB \perp \perp DO_1C_1$. Опустим из точки O перпендикуляры OH_1 и OM_1 на DB_1 и DC_1. Тогда $OH_1 \perp ADC$, так как $OH_1 \perp DB_1$ и $OH_1 \perp AC$ ($AC \perp DO_1B_1$). Значит, $H_1 = H$, т. е. $H \in DB_1$. Аналогично, $OM_1 \perp ADB$, т. е. $M_1 = M$ и $M \in DC_1$. Итак, прямая DM — одновременно медиана и высота треугольника ADB, поэтому $AD = DB$. Тогда $AO_1 = BO_1$, следовательно, $AC = BC$ и точки C, O_1, C_1 лежат на одной прямой.

По теореме о трех перпендикулярах $CO \perp AD$ ($OH \perp \perp ADC$ и $CH \perp AD$), кроме того, $CO \perp AB$ ($AB \perp CDC_1$), поэтому $CO \perp ADB$. Но $OM \perp ADB$, значит, точка O лежит на CM. Отсюда следует, что M — центр окружности, вписанной в треугольник ADB (основание конуса с вершиной C, описанного около сферы — вписанная в треугольник ADB окружность). Рассмотрим треугольник CDC_1. В нем DO_1 и CM — высоты, C_1O — биссектриса, значит, $C_1D = C_1C$, откуда $C_1O_1 : O_1C = C_1M : MD = 1 : 2$. Центры вписанных окружностей треугольников ABC и ADB являются точками пересечения медиан, поэтому треугольники ABC и ADB равносторонние.

Так как высота пирамиды проектируется в центр основания ABC, то заключаем, что тетраэдр — правильный.

II способ. Изобразим развертку тетраэдра $ABCD$ (рис. В24). Пусть сфера касается грани ABC в точке O — центре вписанной окружности, грани ACD (треугольник ACD_1 на рис. В24) — в точке M пересечения медиан, грани BCD (треугольник BCD_2) — в точке H пересечения высот. Согласно свойству касательных, проведенных к сфере из одной точки, $AM = AO$, $CM = CO$, поэтому $\Delta AMC = \Delta AOC$. Отсюда $\angle MAC = \angle OAC$ и $\angle MCA = \angle OCA$. Значит, если 2α, 2β, 2γ — соответственно углы при вершинах A, B и C в треугольнике ABC, то $\angle MAC = \angle OAC = \alpha$, $\angle HBC = \angle OBC = \beta$, $\angle MCA = \angle OCA = \angle OCB = \angle HCB = \gamma$. Но из ΔABC: $2\alpha + 2\beta + 2\gamma = 180°$, т. е. $\alpha + \beta + \gamma = 90°$, а из ΔBKC: $\beta + \gamma + \angle HCK = 90°$, значит, $\angle HCK = \alpha$. Отсюда $\angle KBD_2 = \alpha$, $\angle HD_2C = \beta$ (углы с перпендикулярными сторонами), поэтому $\angle MCD_1 = \angle HCD_2 = \alpha$, $\angle MD_1C = \angle HD_2C = \beta$. Теперь из ΔD_1PC: $\angle D_1PC = 180° - (\alpha + \beta + \gamma) = 90°$; значит, медиана D_1P является и высотой в треугольнике AD_1C. Отсюда $AD_1 = CD_1$ и $\alpha = \gamma$ ($\angle MAC = \angle MCA$). Следовательно, $\Delta AD_1T = \Delta CD_1S$, и, значит, $\angle D_1AT = \angle D_1CS = \alpha$. Мы получили, что медиана AT является и биссектрисой в треугольнике D_1AC, т. е. $\angle AD_1C = \angle ACD_1$, $2\beta = \gamma + \alpha$. Итак, $\alpha = \beta = \gamma = 60°$. Отсюда следует, что грани ABC, ACD и BCD тетраэдра — правильные треугольники, т. е. $AB = BC = CA = AD = DC = BD$, значит, тетраэдр правильный.

В48. Занумеруем горизонтали и вертикали по порядку начиная от края, и назовем *полями* клетки, стоящие на пересечении рядом с нечетными номерами. В частности, все клетки в углах — поля. Заметим, что дырка будет перемещаться только по полям.

Если поле A покрыто доминошкой, то одна из узких сторон доминошки граничит с другим полем B; проведем стрелку из центра A в центр B. Заметим, что если B — дырка, то, сдвинув доминошку по стрелке, мы переместим дырку на A.

Проведем таким образом стрелки из каждого поля (кроме дырки). Если имеется путь по стрелкам из поля A на дырку, то можно перегнать дырку на A, сдвинув сперва доминошку вдоль последней стрелки пути, затем — вдоль предпоследней и т. д.

Докажем, что для любого поля такой путь существует. Путь по стрелкам либо приходит на дырку, либо зацикливается. Покажем, что последнее невозможно. Для этого докажем, что доминошки, соответствующие циклу, охватывают многоугольник с нечетным числом клеток внутри.

Действительно, рассмотрим цикл как линию из стрелок. Если построить новую квадратную сетку с узлами в центрах полей, то цикл пройдет по линиям этой сетки и будет охватывать многоугольник, который сетка разбивает на квадраты со стороной 2. Докажем утверждение индукцией по числу квадратов. Для одного квадрата оно верно — если выложить домино по границе, внутри будет только одна клетка. Многоугольник же из k квадратов получается добавлением квадрата на границе к многоугольнику из $(k - 1)$ квадрата, и нетрудно проверить, что при выкладывании границы доминошками внутри добавляется 2 или 4 клетки.

Итак, цикл должен охватывать многоугольник с нечетным числом клеток внутри. Но это невозможно, так как этот многоугольник должен быть заполнен целым числом доминошек, т. е. содержать четное число клеток, так как дырка исходно расположена на краю.

Значит, циклов нет и существует путь по стрелкам, приходящий на дырку.